



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Рубцовский индустриальный институт
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

А.С. Демидов
А.А. Кутумов

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И КОНСТРУИРОВАНИЯ

Учебное пособие для подготовки бакалавров заочной и заочной сокращенной форм обучения направлений 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 151700 «Машиностроение», 151000 «Технологические машины и оборудование», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Рубцовск 2012

УДК 531.1/3

Демидов А.С., Кутумов А.А. Основы проектирования и конструирования: Учебное пособие для подготовки бакалавров заочной и заочной сокращенной форм обучения направлений: 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 151700 «Машиностроение», 151000 «Технологические машины и оборудование», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». / Рубцовский индустриальный институт.- Рубцовск, 2012. - 291 с.

Содержит основные теоретические вопросы, рассматриваемые по курсу «Основы проектирования и конструирования». Может использоваться в качестве вспомогательного материала при изучении дисциплин: «Сопротивление материалов», «Теоретическая механика», «ТММ» и «Детали машин».

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры «СиМ»
Рубцовского индустриального института
Протокол № 6 от 28.06.12г.

Рецензент:

д.т.н., профессор кафедры
«Строительные машины, автоматика
и электротехника» ФБГОУ
Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)

Э.А. Абраменков

Содержание

Введение.	8
-------------------	---

Раздел I ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1. Статика

1.1.1. Основные понятия статики	9
1.1.2. Основные аксиомы статики	10
1.1.3. Связи и реакции	11
1.1.4. Система сходящихся сил. Геометрический способ сложения сходящихся сил. Равнодействующая сходящихся сил. Разложение сил	14
1.1.5. Проекция сил на ось.	16
1.1.6. Равновесие системы сходящихся сил	20
1.1.7. Система параллельных и антипараллельных сил. Момент силы относительно точки.	23
1.1.8. Произвольная система сил, лежащих в одной плоскости	26
1.1.9. Равновесие произвольной плоской системы сил.	28
1.1.10. Момент силы относительно оси	33
1.1.11. Трение	34
1.1.12. Трение скольжения	34
1.1.13. Равновесие тела на шероховатой поверхности	35
1.1.14. Равновесие тела на наклонной шероховатой поверхности	36
1.1.15. Трение качения.	37
1.1.16. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела.	38

Глава 2. Кинематика

1.2.1. Кинематика точки.	43
1.2.2. Некоторые частные случаи движения точки.	48
1.2.3. Кинематика твердого тела. Поступательное движение твердого тела.	55
1.2.4. Вращательное движение тела и его характеристики.	56
1.2.5. Плоскопараллельное движение твердого тела	62
1.2.6. Определение скорости точек плоской фигуры. Теорема скоростей точек, принадлежащих телу, совершающему плоскопараллельное движение	64
1.2.7. Сферическое движение твёрдого тела	64
1.2.8. Общий случай движения свободного твёрдого тела	67
1.2.9. Сложное движение точки. Относительное, переносное и абсолютное движения.	68
1.2.10. Теорема о сложении скоростей	70

Глава 3. Динамика

1.3.1. Динамика точки.	71
1.3.1.1. Основные законы динамики	71
1.3.1.2. Постановка прямой и обратной задач динамики точки	71

1.3.1.3. Общие теоремы динамики точки	76
1.3.1.4. Количество движения материальной точки. Импульс силы	76
1.3.1.5 Теорема об изменении количества движения	79
1.3.1.7. Кинетическая энергия материальной точки.	81
1.3.1.8. Работа силы.	82
1.3.1.9. Мощность	88
1.3.1.10. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	90
1.3.1.11. Колебания материальной точки	92
1.3.1.12. Свободные незатухающие колебания материальной точки	92
1.3.1.13. Свободные затухающие колебания материальной точки	95
1.3.1.14. Вынужденные колебания	96
1.3.1.15 Понятие силы инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки	102
1.3.1.16. Сложное (абсолютное) и относительное движение материальной точки с позиции динамики	103
1.3.2. Динамика твердого тела и механической системы	106
1.3.2.1. Понятие твердого тела и механической системы	106
1.3.2.2. Масса системы. Центр масс. Момент инерции твердого тела относительно оси. Радиус инерции	107
1.3.2.3. Понятие о кинетической энергии механической системы. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.	114
1.3.2.4 Понятие о механической работе. Работа в механической системе	115
1.3.2.5. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения для механической системы. Закон сохранения количества движения	117
1.3.2.6. Понятие кинетического момента.	118

Раздел II

ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

2.1. Введение в теорию механизмов и машин	119
2.1.1. Основные понятия и определения	119
2.1.2. Кинематическая пара. Элемент пары	124
2.1.3. Классификация кинематических цепей. Механизм	125
2.1.4. Классификация кинематических пар	126
2.1.5. Кинематическая схема механизма	129
2.1.6. Структурный анализ и синтез механизмов	131
2.1.7. Классификация механизмов	132
2.2. Кинематический анализ плоских механизмов	137
2.2.1. Задачи кинематического анализа	137
2.2.2. Кинематический анализ шарнирного четырёхзвенника	137
2.2.3. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма	141
2.2.4. Кинематический анализ кулисного механизма	145
2.3. Передачи	149
2.3.1. Общие сведения о передачах	149

2.3.2. Зубчатые передачи	150
2.3.3. Эвольвента круга	151
2.3.4. Геометрические элементы зубчатого колеса	154
2.3.5. Кинематика зубчатых передач с неподвижными осями колёс	156
2.3.6. Планетарные зубчатые механизмы	158
2.3.7. Передаточные отношения планетарных и дифференциальных механизмов	160
2.3.8. Определение передаточных отношений многозвенных зубчатых механизмов	161
2.4. Динамический анализ механизмов	163
2.4.1. Основные задачи динамического анализа механизмов	163
2.4.2. Силы, действующие на звенья механизма	165
2.4.3. Силы инерции звеньев плоских механизмов	166
2.4.4. Приведённые силы и моменты	169
2.4.5. Кинетическая энергия механизма	171
2.4.6. Приведённая масса и приведённый момент механизма	172
2.4.7. Задачи и методы силового анализа механизма	174
2.4.8. Силы инерции звеньев механизма	175

Раздел III СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

3.0. Общее понятие о сопротивлении материалов	180
3.0.1. Классификация сил, действующих на элементы конструкций	180
3.0.2. Внутренние силы. Метод сечений	181
3.1. Деформация растяжение-сжатие	184
3.1.1. Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений. Подбор поперечных сечений по допускаемым напряжениям	186
3.1.2. Определение напряжений в наклонных сечениях	193
3.1.3. Механические свойства материалов. Диаграммы растяжения (усилий и напряжений)	194
3.1.4. Примеры типовых задач по теме «Растяжение-сжатие»	198
3.2. Геометрические характеристики сечений	199
3.2.1. Актуальность использования дополнительных геометрических характеристик поперечного сечения	199
3.2.2. Основные геометрические характеристики плоских сечений. Их общие свойства	200
3.2.3. Геометрические характеристики простейших сечений	202
3.2.4. Моменты инерции при параллельном переносе осей	204
3.3. Сдвиг и срез	205
3.3.1. Общее понятие о деформации сдвига(среза)	205
3.3.2. Расчёт на прочность при сдвиге	208
3.3.3. Расчёт некоторых сварных соединений	212
3.3.4. Паяные соединения	217
3.3.5. Клеевые соединения	218
3.4. Кручение	220
3.4.1. Общие сведения о кручении	220

3.4.2. Вращающий момент. Моменты сопротивления кручению. Крутящие моменты. Построение эпюры крутящих моментов	220
3.4.3. Вычисление моментов, передаваемых на вал	223
3.4.4. Определение напряжений при кручении вала круглого поперечного сечения	224
3.5. Изгиб.	226
3.5.1. Общие сведения об изгибе	226
3.5.2. Определение величины поперечной силы и изгибающего момента. Построение эпюр изгибающего момента и поперечной силы	227
3.5.3. Дифференциальные зависимости между интенсивностью сплошной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом	228
3.5.4. Нормальные напряжения при изгибе. Формула Навье	229
3.5.5. Подбор поперечного сечения балки по наибольшим допускаемым нормальным напряжениям.	231

Раздел IV ДЕТАЛИ МАШИН

4.0. Краткие сведения о механических передачах. Механические передачи трением	236
4.1. Фрикционные передачи. Общие сведения	237
4.2. Виды фрикционных передач	239
4.3. Фрикционные вариаторы	239
4.4. Материалы катков	240
4.5. Сила нажатия катков	241
4.6. Расчет металлических катков на контактную прочность	241
4.7. Определение допускаемого контактного напряжения	243
4.8. Потери на трение, КПД и расчет фрикционной передачи на нагрев	244
4.9. Определение нагрузок на валы	245
4.10. Расчёт валов	246
4.11. Выбор подшипников качения	247
4.12. Расчет шпоночного соединения	249
4.13. Опоры валов и осей	254
4.14. Муфты	256
4.15. Уплотнительные устройства	260
4.16. Упругие элементы	262
4.17. Ременные передачи. Общие сведения	264
4.18. Материалы ремней	265
4.19. Зубчатые передачи. Общие сведения	265
4.20. Основные элементы цилиндрической зубчатой передачи	266
4.21. Виды разрушения зубьев	267
4.22. Силы, действующие в прямозубом цилиндрическом зацеплении	268
4.23. Расчёт зубьев на контактную прочность	269
4.24. Расчёт зубьев на изгибную прочность	270
4.25. Резьбовые соединения. Общие сведения	271
4.26. Классификация и основные типы резьб	272

4.27. Расчёт резьбовых соединений на прочность	275
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	278
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	280
ПРИЛОЖЕНИЕ.	282

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие представляет собой краткий лекционный и практический курс «Основы конструирования и проектирования», предназначенный для подготовки бакалавров заочной и заочной сокращенной форм обучения направлений 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 151700 «Машиностроение», 151000 «Технологические машины и оборудование», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Цель данного пособия заключается в формировании у студентов заочной и заочной сокращенной формы обучения технических специальностей основных понятий о механике и механических процессах.

Пособие представляет собой рабочий материал, изучение которого во многом облегчает восприятие таких дисциплин, как «Сопротивление материалов», «Теоретическая механика», «ТММ» и «Детали машин».

РАЗДЕЛ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ГЛАВА 1. СТАТИКА

1.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется *механикой*.

Раздел механики, в котором рассматриваются общие понятия механики, законы и методы решения, называется *теоретической механикой*. Теоретическая механика имеет три раздела: статику, кинематику и динамику. Традиционно изучение теоретической механики начинают с раздела статики.

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются законы и условия равновесия материальных тел.

Учитывая относительный характер понятия равновесия, можно понимать под этим состоянием частный случай движения. В общем курсе статики изучаются только задачи о равновесии твердых (абсолютно твердых) тел.

Абсолютно твердым телом (абсолютно жестким) называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается всегда постоянным. Тело, которому можно сообщить любое перемещение, называется *свободным*. В противном случае – *несвободным*. Рассматриваемые в механике величины разделяются на *скалярные* и *векторные* величины.

Скалярные величины полностью характеризуются числовым значением, например, время – t (сек).

Векторные величины характеризуются числовым значением и направлением в пространстве, например, сила - характеризуется числовым значением или модулем силы, направлением и точкой приложения. Модуль силы оценивают путем сравнения с силой, принятой за единицу измерения.

Единица измерения силы в системе СИ - N (Ньютон). Графически сила изображается в виде вектора, обозначается как \vec{F} . Длина этого вектора (направленного отрезка) в выбранном масштабе соответствует модулю силы. Прямую, по которой направлен вектор силы, называют линией действия силы. Как правило, на произвольное тело действует не одна, а несколько сил.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на данное тело (тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, такая система сил называется плоской. В противном случае система сил будет пространственной.

Свойства силы (системы сил):

1) Система сил, обуславливающая нахождение свободного твердого тела в состоянии покоя, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.

2) Если данная система сил эквивалентна одной силе, то такая сила будет являться равнодействующей данной системы.

3) Сила, равная равнодействующей по модулю и действующая противоположно равнодействующей, называется уравновешивающей силой.

4) Внешними считаются силы, которые действуют на тело (систему тел) извне. Внутренними силами считаются силы, с которыми части данного тела

(или данной системы) действуют друг на друга.

5) Сила, приложенная к телу в одной точке, называется *сосредоточенной*.

Силовая нагрузка, действующая на все или на некоторые примыкающие к друг другу точки данного объема или плоскости тела, называется *распределенной*.

Сосредоточенные силы могут представлять собой равнодействующую некоторых систем распределенных сил. К примеру, сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую элементарных сил тяжести, действующую на его частицы. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести.

6) Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*, а систему, которую они образуют, называют *системой сходящихся сил*. Силы, линии действия которых параллельны друг другу, называют *параллельными*, а систему, которую они образуют, - *системой параллельных (антипараллельных) сил*.

7) Если систему сил, действующих на свободное твердое тело (тела), можно заменить другой системой сил, не изменяя при этом состояние покоя (движения) данного тела или данных тел, то такие системы сил будут называться *эквивалентными* друг другу.

Типовые задачи статики:

1. Преобразование системы сил, действующих на твердое тело (тела), в более простую, эквивалентную данной системе.

2. Определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело (тела).

1.1.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. Если на твердое тело действуют две силы, то тело будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

2. Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

3. Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести точку приложения данной силы вдоль её линии действия в любую точку тела.

4. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, приложенную в этой точке и являющуюся диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил, как на сторонах (правило параллелограмма).

5. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие (третий закон Ньютона).

6. Равновесие в некоторых случаях изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если его считать абсолютно твердым (отвердевшим).

1.1.3. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ

В предыдущем параграфе мы познакомились с понятием «свободное тело». Надо полагать, что в природе тел с такими характеристиками фактически не существует. Как правило, что - то препятствует перемещению данного тела.

Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют другие тела, называется *несвободным*.

В таком случае, все, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называется *связью*. Допустим, тело под действием приложенных внешних сил пытается осуществить перемещение. Этому перемещению препятствует связь, оказывая на тело силовое воздействие, называемое *силой реакции (реакцией связи)*, в полном соответствии с третьим законом Ньютона.

Как и всякая другая силовая характеристика, реакция связи характеризуется своим значением, точкой приложения и направлением. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную тому направлению, в котором она препятствует перемещению данного тела. Рассмотрим основные виды связей.

1. Реакция \vec{N} гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел и приложена в точке касания (см. рис. 1.1, а). В том случае, если в месте контакта одна из соприкасающихся поверхностей вырождается при плоском рассмотрении в точку, то реакция \vec{N} направляется по нормали к другой поверхности, рис. 1.1, б).

2. Связь, представленная в виде гибкой нерастяжимой нити. Реакция \vec{T} направлена вдоль нити к точке подвеса, (см. рис.1.1, в, и рис.1.5).

3. Связь в виде цилиндрического шарнира. Реакция \vec{R} может иметь любое направление в плоскости xOz , перпендикулярной оси шарнира y (рис.1.2).

4. Реакция сферического шарнира \vec{R} может иметь любое направление в пространстве (рис. 1.3).

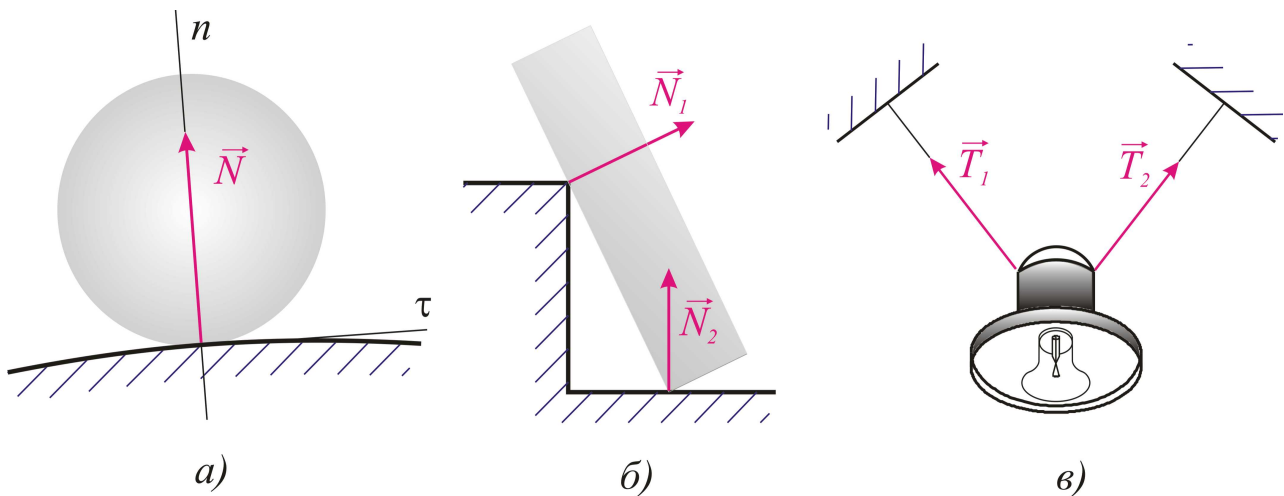


Рис. 1.1. Виды связей

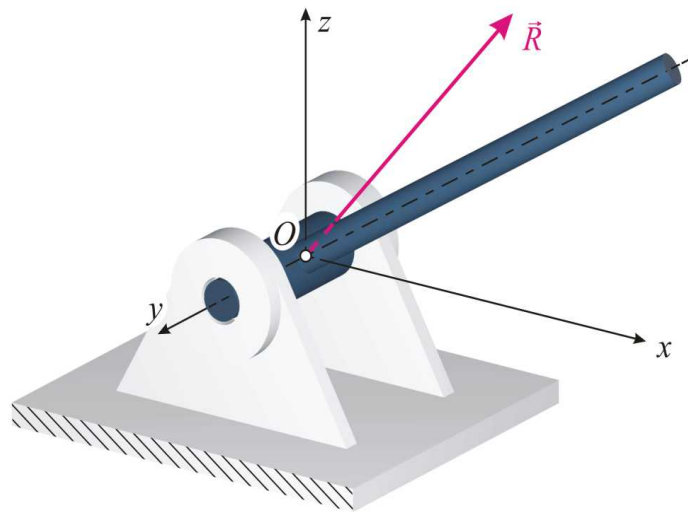


Рис. 1.2. Реакция цилиндрического шарнира

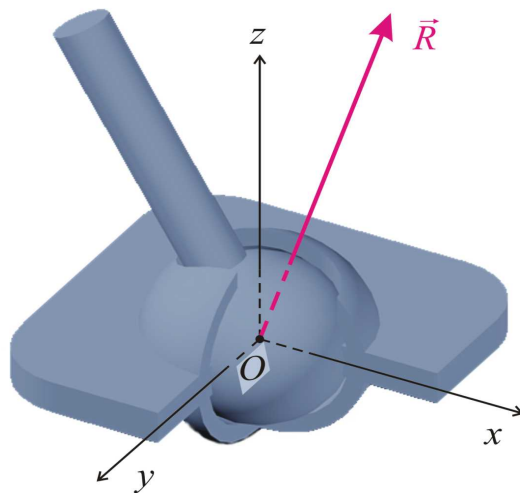


Рис. 1.3. Реакция сферического шарнира

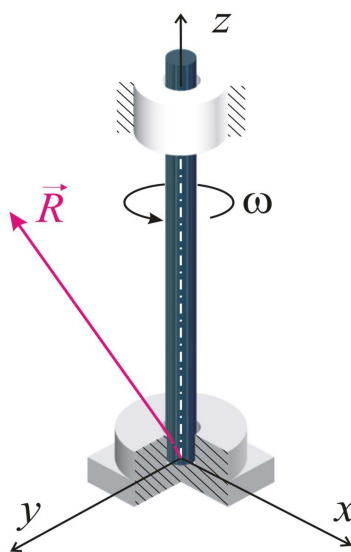


Рис. 1.4. Реакция подпятника в подшипниковом узле

5. Реакция невесомого шарнирно закрепленного прямолинейного стержня \vec{N} направлена по оси стержня. Если стержень пытаются растянуть, она направлена к опорной поверхности (\vec{N}_2); если стержень пытаются сжать – от опорной поверхности (\vec{N}_1) (рис. 1.6). Принято считать стержень *невесомым*, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакции связей при решении задач статики обычно являются величинами неизвестными и подлежат определению.

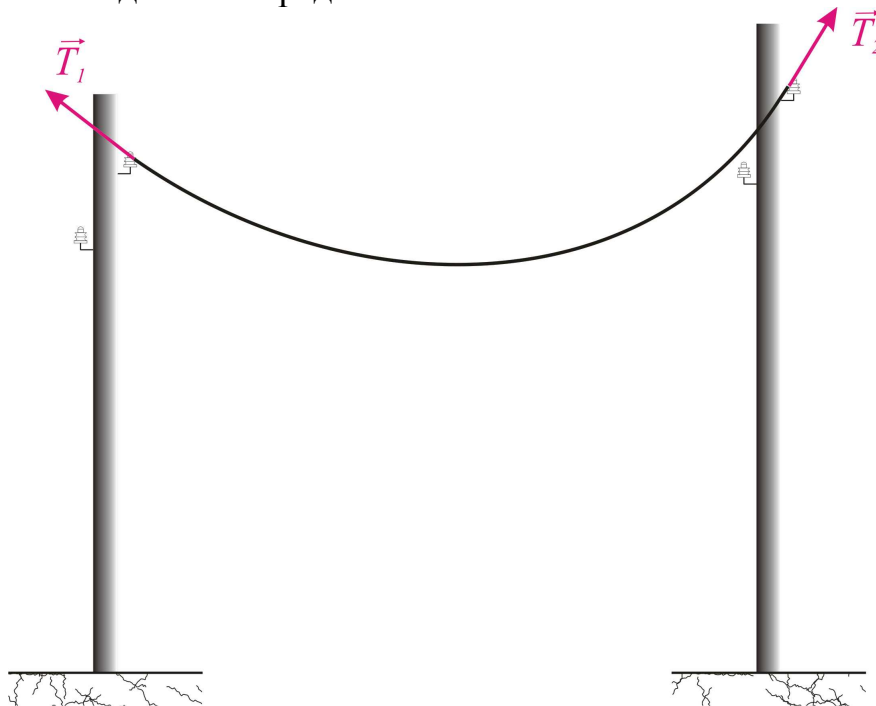


Рис. 1.5. Реакция гибкой связи

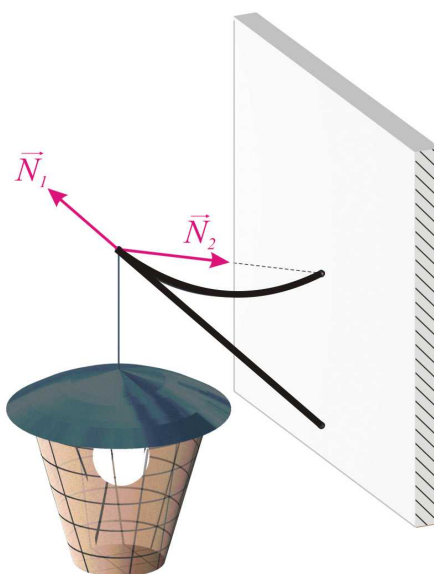


Рис. 1.6. Реакции шарнирных невесомых стержней

1.1.4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ

Величина силы \vec{R}' , равная геометрической сумме сил какой-либо системы, называется *главным вектором* этой системы сил. Не следует смешивать понятия равнодействующей системы сил \vec{R} и главного вектора системы сил \vec{R}' . Для некоторых систем сил равнодействующей не существует, а геометрическую сумму (главный вектор) можно всегда определить. Для системы сходящихся сил понятие равнодействующей системы и главного вектора тождественно: $\vec{R} \equiv \vec{R}'$. С целью приведения системы сходящихся к более простому виду применяют геометрические и аналитические способы сложения этих сил. Рассмотрим геометрический способ сложения сходящихся сил на примере плоской системы сил.

1. Сложение двух сил. Геометрическая сумма $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ системы двух сходящихся сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (равнодействующая или главный вектор) находится по *правилу параллелограмма*. Модуль их равнодействующей \vec{R} определяется по формулам:

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}, \quad (1.1)$$

или $R = F_1 \sin \alpha \cdot (\sin \gamma)^{-1}, \quad (1.1')$

или $R = F_2 \sin \alpha \cdot (\sin \beta)^{-1}; \quad (1.1'')$

где $\sphericalangle \alpha = (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2)$, $\sphericalangle \beta = (\vec{F}_1 \wedge \vec{R})$, $\sphericalangle \gamma = (\vec{F}_2 \wedge \vec{R})$ (рис.1.7).

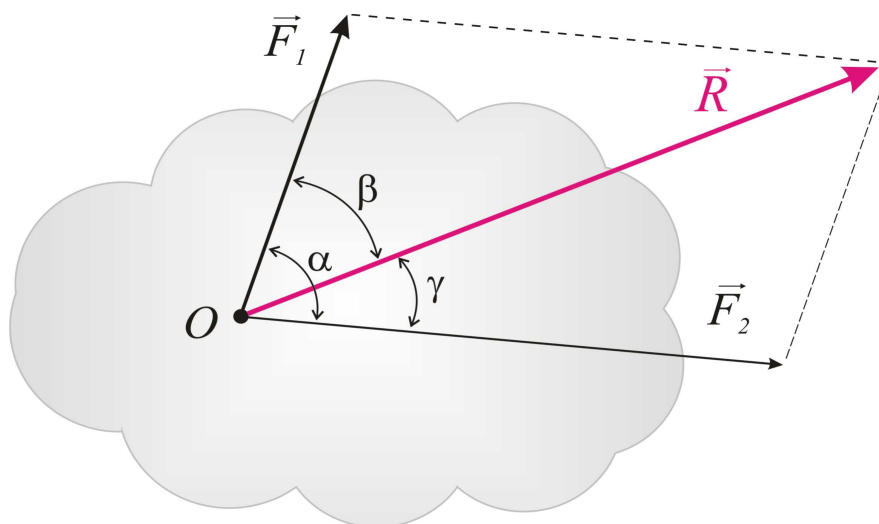


Рис. 1.7. Геометрический способ сложения в системе сходящихся сил - правило параллелограмма

2. Сложение системы сходящихся трех сил, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$, не лежащих в одной плоскости, определяется диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда).

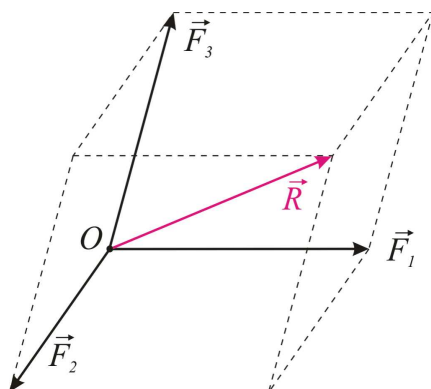


Рис. 1.8. Правило параллелепипеда

3. Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется с помощью последовательного применения правила параллелограмма или построением силового многоугольника. Второй способ является более практичным. В этом случае для системы (например, сходящихся сил) откладывают от произвольной точки O вектор, изображающий в выбранном масштабе силу \vec{F}_1 , от точки a - вектор, изображающий силу \vec{F}_2 , от точки b - вектор, изображающий силу \vec{F}_3 , и т.д. От конца предпоследнего вектора откладываем вектор, отображающий силу. Соединив начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\vec{R}' \equiv \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму, или главный вектор:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.2)$$

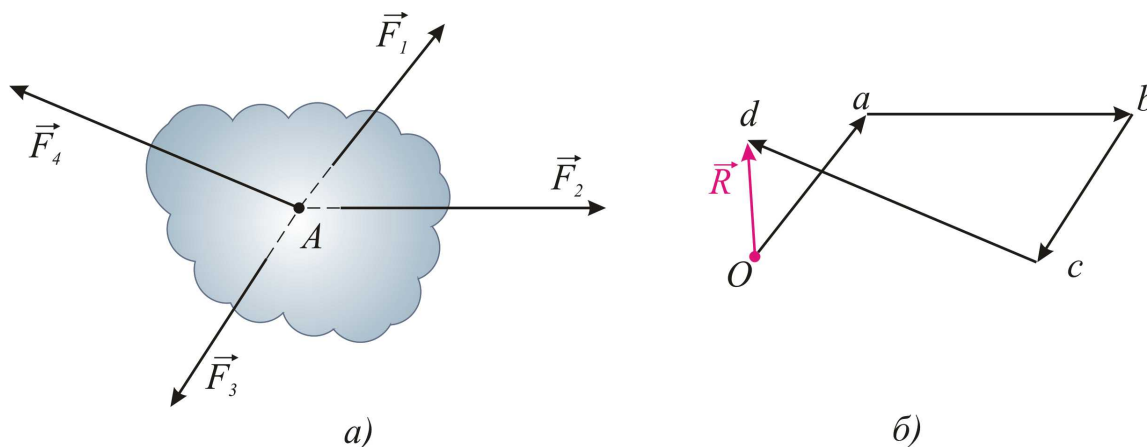


Рис. 1.9. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил:
а) расчётная схема; б) незамкнутый силовой многоугольник ($\vec{R} \neq 0$)

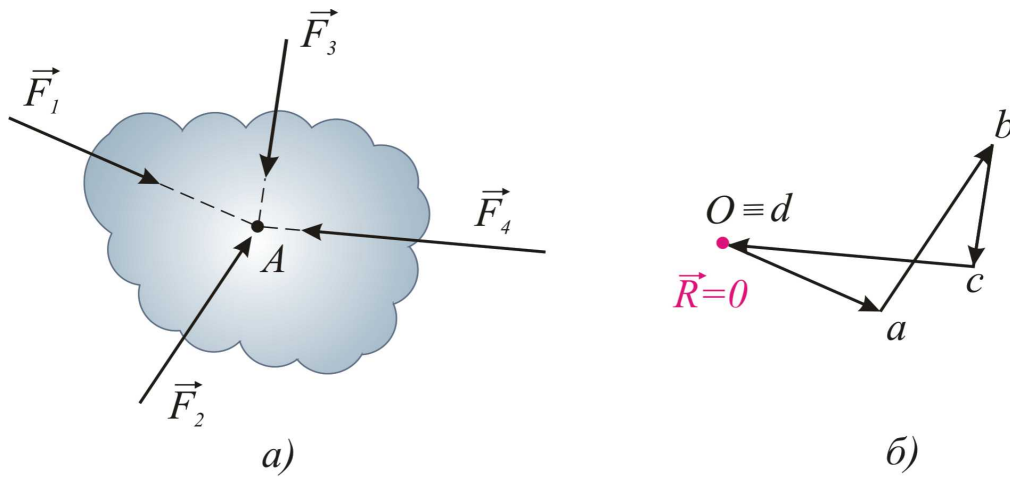


Рис. 1.10. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил: а) расчётная схема; б) замкнутый силовой многоугольник ($\vec{R}=0$) (система является уравновешенной)

4. Равнодействующая сходящихся сил. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения линий действия. Следовательно, система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (рис. 1.9, а) имеет равнодействующую \vec{R} , равную главному вектору \vec{R}' и приложенную в точке A (или в любой точке, находящейся на линии действия силы \vec{R} , проведенной через точку A).

5. Разложение сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 по направлениям сводится к применению правил, обратных правилам параллелограмма и параллелепипеда (рис. 1.7 и рис. 1.8), соответственно.

1.1.5. ПРОЕКЦИЯ СИЛ НА ОСЬ

Проекция силы (вектора) на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый - проекция положительная величина, тупой - отрицательная, прямой - равна 0 (рис. 1.11).

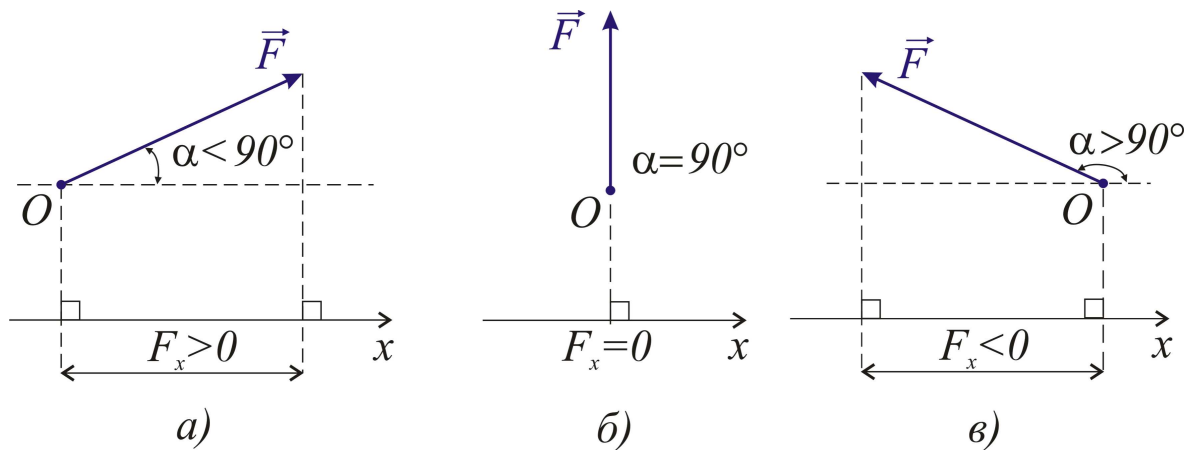


Рис. 1.11. Проекция вектора силы на ось

Проекцией силы на плоскость Oxy называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы F на эту плоскость. Для аналитического решения удобно задавать силу её проекциями на координатные оси: F_x, F_y, F_z .

Для трехмерного пространства модуль вектора силы определяется как

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.3)$$

Положение данного вектора в пространственной системе оценивается при помощи направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (1.3')$$

Для двумерного пространства модуль силы определяется:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (1.4)$$

а положение:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (1.4')$$

Аналитический способ сложения сходящихся сил основан на теореме о том, что проекция вектора суммы на любую ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на эту ось.

Отсюда следует, если \vec{R} - равнодействующая системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, то $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

и

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (1.5)$$

Зная R_x, R_y, R_z , модуль равнодействующей для трехмерного пространства можно определить по следующей формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (1.6)$$

Положение равнодействующей определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (1.7)$$

где $\sphericalangle \alpha = (\vec{R} \wedge Ox)$, $\sphericalangle \beta = (\vec{R} \wedge Oy)$, $\sphericalangle \gamma = (\vec{R} \wedge Oz)$.

Для двумерного пространства:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.8)$$

а положение равнодействующей:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}. \quad (1.9)$$

Если силы заданы в виде модулей, углов с осями, для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

Пример 1.1. Силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ представляют собой плоскую систему сходящихся сил, рис. 1.12. Определить графическим и аналитическим способом положение ($\sphericalangle \alpha = \vec{R} \wedge Ox$) и модуль равнодействующей данной системы.

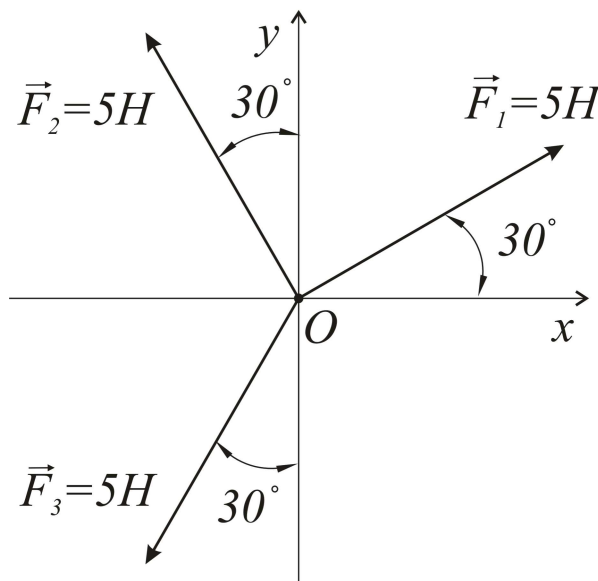


Рис. 1.12. К условию примера 1.1

Решение. 1. Для решения задачи графическим способом складываем, используя правило параллелограмма, векторы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 . Затем полученную векторную сумму $(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$ сложим с вектором \vec{F}_2 . Результат векторного сложения будет представлять собой вектор равнодействующей (главный вектор) системы сходящихся сил, рис.1.13, т.е.: $\vec{R} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + \vec{F}_2$.

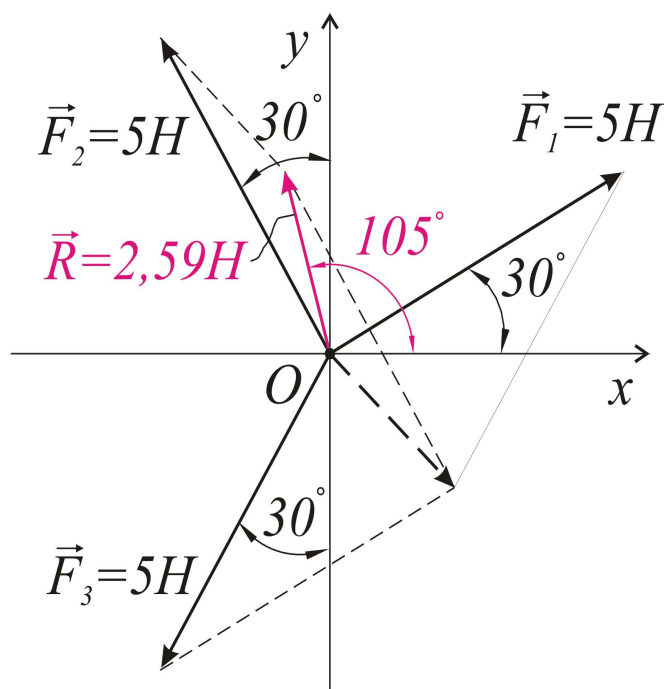


Рис. 1.13. Геометрический способ решения (пример 1.1)

Для определения модуля и положения вектора равнодействующей можно использовать механические способы измерений (транспортир+линейка) или электронные, с помощью соответствующего программного обеспечения.

В результате чего можно прийти к результату:

$$\sphericalangle \alpha = 105^\circ; \quad |R| \approx 2,59 \text{ H}.$$

2. Решим эту же задачу аналитическим способом.

Пользуясь понятием проекции вектора силы на ось, определим проекции всех сил на оси x и y .

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^\circ; \quad F_{1y} = F_1 \cdot \sin 30^\circ;$$

$$F_{2x} = -F_2 \cdot \sin 30^\circ; \quad F_{2y} = F_2 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$F_{3x} = -F_3 \cdot \sin 30^\circ; \quad F_{3y} = -F_3 \cdot \cos 30^\circ.$$

Суммы проекций всех сил на те или иные оси будут определять величины проекций равнодействующей на те же оси, т.е.:

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 5 \cdot \cos 30^\circ - 5 \cdot \sin 30^\circ - 5 \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow R_x = -0,4487 \text{ H}.$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 5 \cdot \sin 30^\circ + 5 \cdot \cos 30^\circ - 5 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow R_y = 2,5 \text{ H}.$$

После чего можно определить модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0,4487^2 + 2,5^2} \Rightarrow R \approx 2,59 \text{ H}.$$

Положение вектора равнодействующей определим при помощи направляющего косинуса:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,4487}{2,59} \Rightarrow \sphericalangle \alpha = \arccos\left(\frac{-0,4487}{2,59}\right) \Rightarrow \sphericalangle \alpha = 105^\circ.$$

Порядок и результаты аналитического расчета можно интерпретировать графически, рис. 1.14.

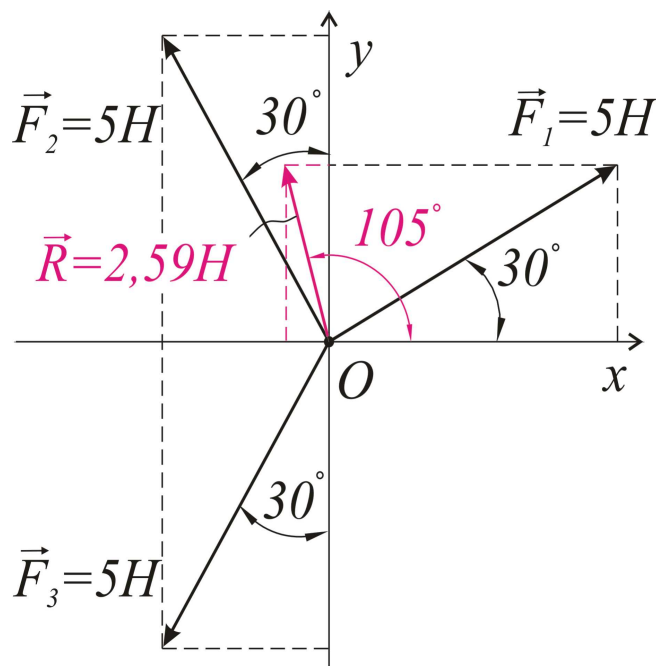


Рис.1.14. К аналитическому способу решения (пример 1.1)

Сравнивая результаты графического и аналитического способа, убеждаемся в их идентичности. Следует отметить, что аналитический способ позволяет получить более точные результаты.

1.1.6. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут, т.е. чтобы модуль главного вектора $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ данной системы сил был равным 0.

2. Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.

Условие равновесия пространственной системы рассматривают в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Т.е. для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую координатную ось были равны 0.

Для плоской системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \quad (1.10')$$

Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех не параллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Отметим, что обратной теоремы не существует, так как тело под действием трех сил может и не находиться в равновесии. Отсюда следует, что теорема выражает необходимое, но не достаточное условие равновесия системы сходящихся сил.

Пример 1.2. Шар 1 весом 16 Н и шар 2 связаны нитью, перекинутой через блок D , и удерживаются в равновесии, рис.1.15. Определить вес шара 2, если угол $\alpha = 30^\circ$.

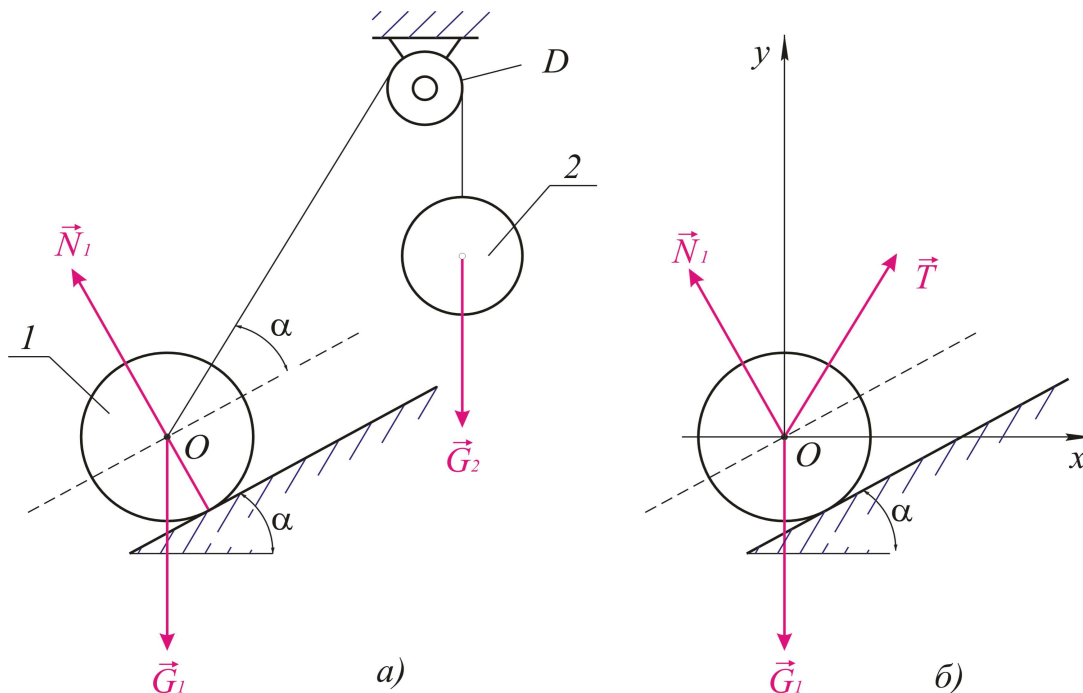


Рис.1.15. К примеру 1.2

Решение: Система является равновесной, т.е. находится в покое. Заменяем шар 2 неизвестной силой натяжения \vec{T} , ($|\vec{T}| = |\vec{G}_2|$) от его неизвестного веса \vec{G}_2 и перенесём точку её приложения по её линии действия в центр тяжести шара 1. Изобразим все силы, действующие на шар 1, см. рис. 1.15, б). Так как линии действия сил \vec{N} , \vec{T} , \vec{G}_2 пересекаются в одной точке O , то данная система является плоской системой сходящихся сил, для которой аналитическими условиями равновесия будет система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Проведем через точку O оси x, y и составим данные уравнения применительно к нашей задаче.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0: \quad T \cdot \cos 2\alpha - N \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow T = N.$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0: \quad -G_1 + N \cdot \sin 2\alpha + T \sin 2\alpha = 0.$$

Заменяя, согласно первому уравнению, N на T во втором уравнении, определим искомую величину веса $G_2 = T$:

$$G_2 = T = \frac{G_1}{2 \sin 2\alpha} = \frac{16}{2 \sin (2 \cdot 30^\circ)} = 9,238 \text{ Н}.$$

Пример 1.3. Два груза весом \vec{G}_1 и \vec{G}_2 находятся в равновесии. Определить натяжение веревки BC , если известны вес груза $G_2 = 90 \text{ Н}$ и углы $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$.

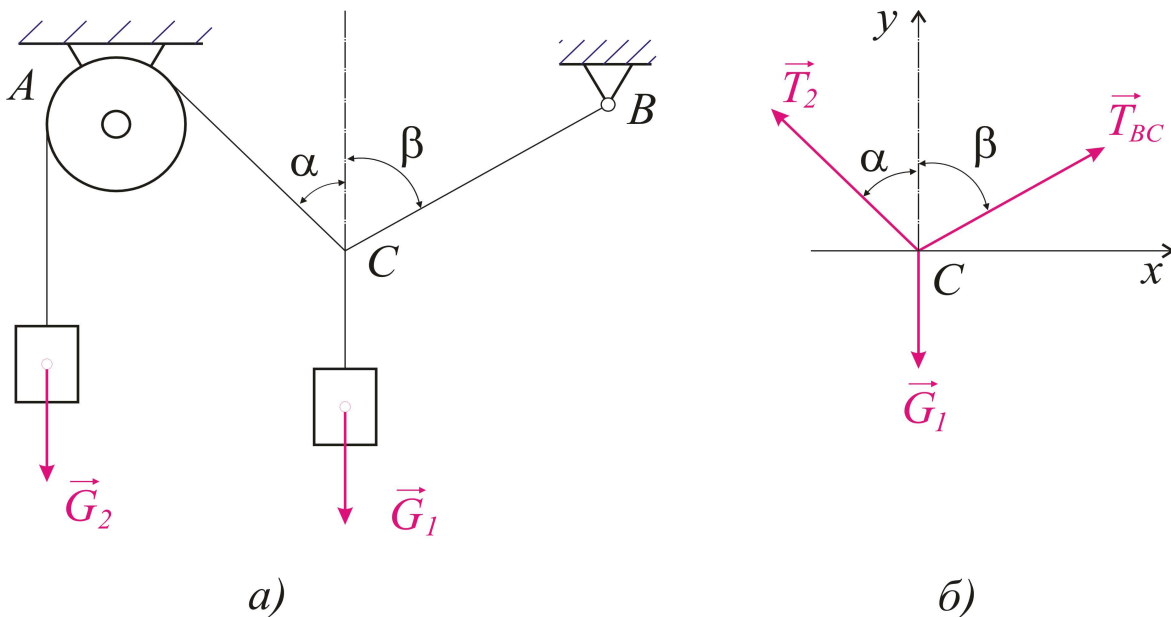


Рис.1.16. К примеру 1.3: а) исходная схема; б) расчётная схема

Решение: Заменим груз 2 неизвестной силой натяжения \vec{T}_2 , ($|\vec{T}_2| = |\vec{G}_2|$) и, отбросив опору B , приложим силу натяжения верёвки BC , обозначая её как \vec{T}_{BC} . В результате получим систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в точке C .

Для плоской системы сходящихся сил аналитическим условием равновесия является

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Проведем через точку C ось x и составим уравнение применительно к нашей задаче.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0: \quad -T_2 \cdot \sin \alpha + T_{BC} \sin \beta = 0 \Rightarrow T_{BC} = \frac{T_2 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{90 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 73,485 \text{ Н.}$$

(Второе уравнение не было использовано по причине отсутствия необходимости).

1.1.7. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Системой параллельных (антипараллельных) сил называется система, в которой линии действия сил, составляющих данную систему, параллельны.

Рассмотрим случай, когда система состоит из двух параллельных сил, направленных в одну сторону и $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$. Модуль равнодействующей в таком случае будет равен алгебраической сумме модулей этих сил, а равнодействующая делит расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам, рис. 1.17, а). Таким образом:

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (1.11)$$

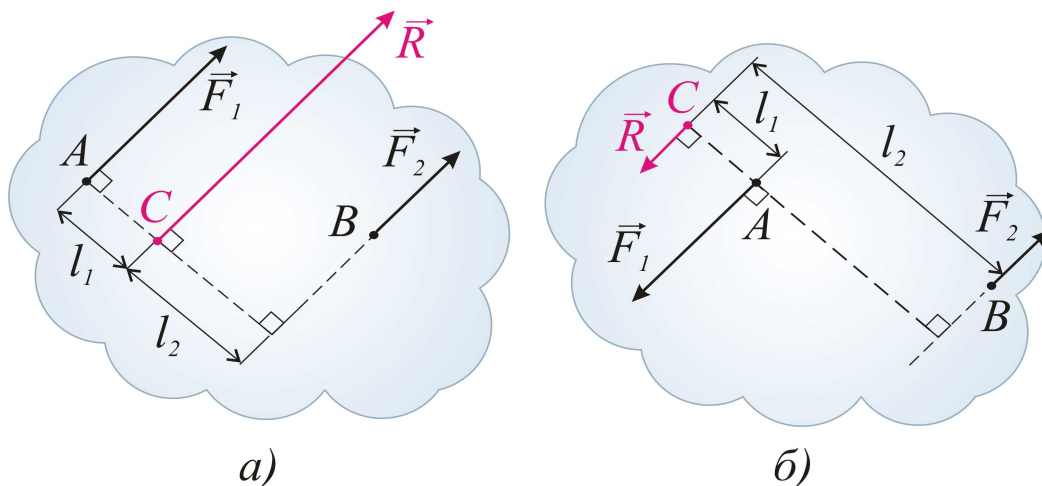


Рис.1.17. Определение положения равнодействующей системы: а) двух параллельных сил; б) двух антипараллельных сил

Равнодействующая двух антипараллельных сил (примем $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$) равна по модулю разности модулей этих сил, расположена за большей силой и

направлена в ту же сторону, рис.1.17, б).

Линия действия равнодействующей и в этом случае отстоит от линий действия сил на расстояниях, обратно пропорциональных этим силам:

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (1.12)$$

Система двух антипараллельных сил, равных модулю, называется *системой пары сил*.

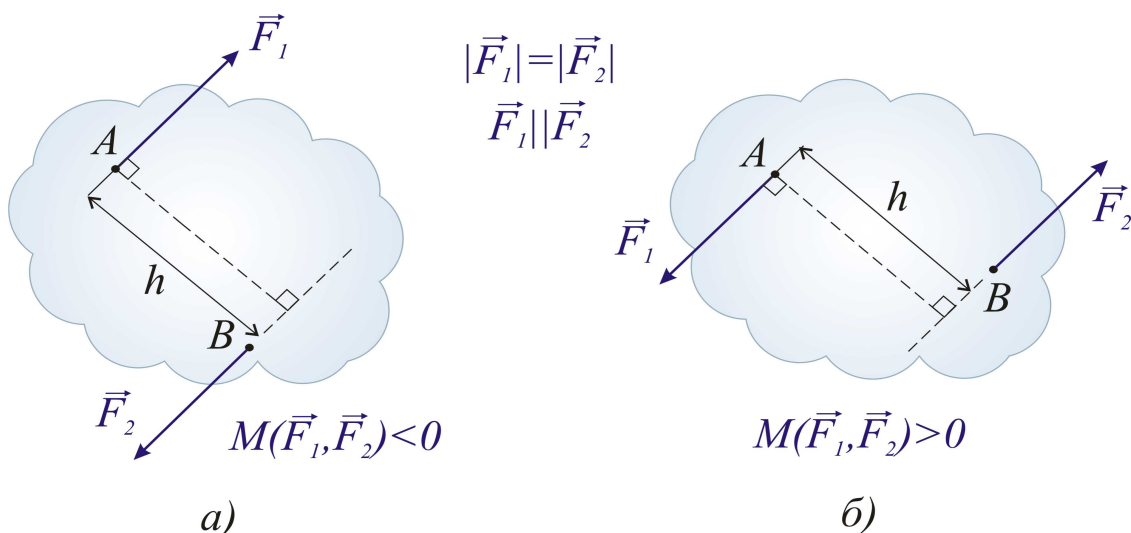


Рис 1.18. Система пары сил и правило знаков момента пары сил (силы): а) пара сил с положительным моментом; б) пара сил с отрицательным моментом

Расстояние h между линиями действия этих сил называется *плечом пары*. Так как две силы, равные по модулю и направленные в противоположные стороны, не лежат на одной линии действия, то твердое тело, к которому приложена пара, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена. Мерой действия пары сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) является алгебраическая величина, называемая *моментом* M . Момент пары сил равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо:

$$M = \pm |\vec{F}_i| \cdot h, \quad [H \cdot m]. \quad (1.13)$$

Правило знаков моментов

Если пара сил стремится повернуть своё плечо против часовой стрелки, то момент считается положительным, а если по часовой – отрицательным (рис.1.18). Момент, показанный на рис. 1.18, а, согласно правилу знаков, – отрицательный, на рис. 1.18, б - положительный.

Теория пар на плоскости состоит из четырёх положений.

1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару,

относительно произвольной точки не зависит от выбора этой точки.

2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости её действия.

3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны.

4. При сложении нескольких пар сил на плоскости получается равнодействующая пара, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар:

$$M = M_1 + \dots + M_n, \quad \text{или} \quad M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (1.14)$$

Для равновесия твердого тела под действием системы пар сил, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов данных пар равнялась нулю:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (1.15)$$

Момент можно также представлять в виде традиционного вектора. В этом случае *моментом силы \vec{F} относительно точки O* называется приложенный в точке O вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы \vec{F} на плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда эта сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, рис. 1.19. Согласно этому определению: $M_O(\vec{F}) = F \cdot h = 2 \text{пл.} \Delta OAB = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$, где \vec{r} - радиус-вектор точки A , проведенный из центра O .

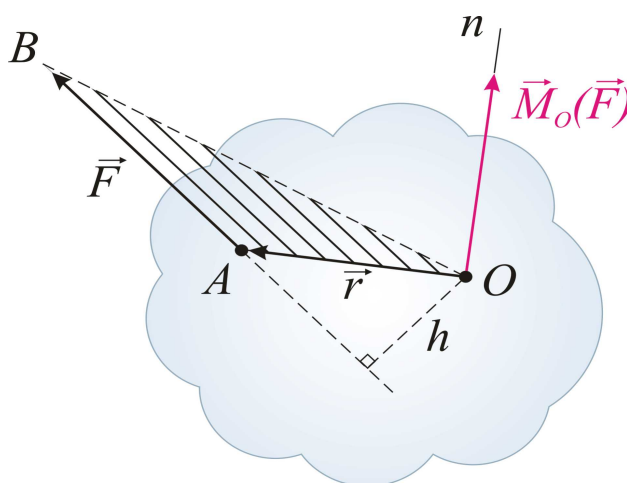


Рис. 1.19. Векторное представление момента пары (силы)

Здесь необходимо вспомнить определение векторного произведения «..векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , и направленный перпендикулярно плоскости этих векторов в

сторону, откуда кратчайшее совмещение \vec{a} к \vec{b} видно происходящим против хода часовой стрелки». Согласно этому определению, вектор момента пары можно также представить, см. рис. 1.19.

Свойства момента:

Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия.

Момент силы относительно центра O равен 0, если линия действия силы проходит через центр O .

Теорема о параллельном переносе силы.

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится.

Таким образом, можно использовать приведение силы к данной точке для преобразования произвольной системы сил в простейшую.

1.1.8. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим следующее определение:

Главным вектором \vec{R}' называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, или:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.16)$$

Проекции главного вектора \vec{R}' на оси декартовых координат равны суммам проекций сил данной системы на эти же оси:

$$R'_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i x, \quad R'_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i y, \quad R'_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i z. \quad (1.17)$$

Модуль главного вектора можно определить как

$$|\vec{R}'| = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}. \quad (1.18)$$

Направляющие косинусы главного вектора:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\vec{R}' \wedge Ox) = \frac{R'_x}{R'}; \\ \cos \beta &= \cos(\vec{R}' \wedge Oy) = \frac{R'_y}{R'}; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\cos \gamma = \cos(\vec{R}' \wedge Oz) = \frac{R'_z}{R'}.$$

Отличие главного вектора \vec{R}' от равнодействующей \vec{R} заключается в том, что равнодействующая \vec{R} - это одна сила, эквивалентная данной системе сил, а главный вектор \vec{R}' эквивалентен данной системе сил только в совокупности с парой, момент которой равен M_O . *Главным моментом* M_O относительно центра O называется сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого центра:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i). \quad (1.20)$$

Исходя из определения, \vec{R}' является статическим инвариантом системы, т.е. величина и направление главного вектора \vec{R}' не зависит от центра приведения системы. Главный момент M_O при перемене центра приведения меняется, то есть зависит от выбора точки приведения.

Например, главный момент плоской системы сил относительно нового центра приведения O' равен сумме главного момента этой системы сил относительно старого центра O и момента относительно нового центра главного вектора \vec{R}' , приложенного в старом центре: $M_{O'} = M_O + M_{O'}(\vec{R}')$.

Теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей, рис.1.20, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки:

$$M_O(\vec{R}) = \sum M_O(\vec{F}_i). \quad (1.21)$$

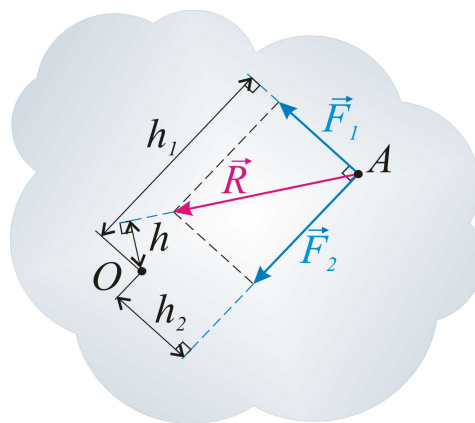


Рис. 1.20. К теореме Вариньона о моменте равнодействующей относительно точки: $M_O(\vec{R}) = h \cdot |\vec{R}| = h_1 \cdot |\vec{F}_1| - h_2 \cdot |\vec{F}_2|$

Теорема о параллельном переносе силы

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить из

исходной точки в любую другую точку тела, добавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится (рис. 1.21).

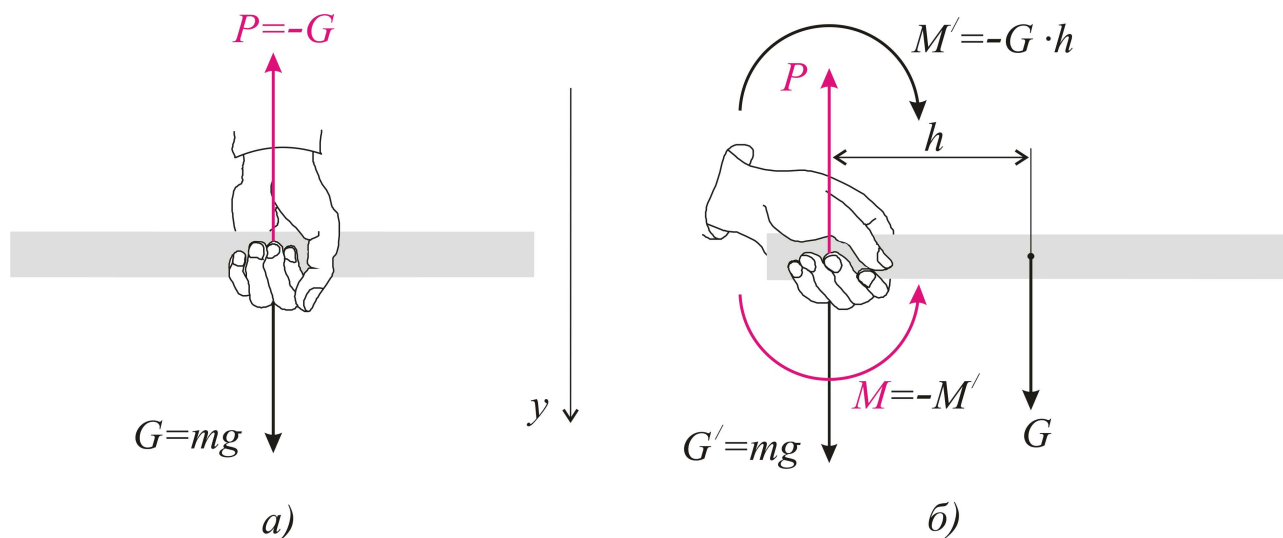


Рис. 1.21. К теореме о параллельном переносе силы

На практике часто используют приведение силы к данной точке с целью приведения произвольной системы сил к простейшей, эквивалентной исходной.

1.1.9. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил оси и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялась нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_y = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

В уравнениях (1.22) оси, относительно которых составляются уравнения проекций, не должны быть параллельны друг другу.

Возможны другие варианты рассматриваемых систем уравнений равновесия, например:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

При этом необходимо учесть, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно прямой, проходящей через две точки, относительно которой составляются уравнения моментов. Можно применить следующие условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Выражения (1.24) можно использовать в случае, если эти три точки не лежат на одной прямой.

Условия равновесия твердого тела под действием плоской системы параллельных сил будут следующими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Причем в этом случае ось x не должна быть перпендикулярной к рассматриваемым силам.

Пример 1.4. Пользуясь уравнениями равновесия для плоской произвольной системы сил, определить опорные реакции жесткой заделки A .

Решение. Упрощаем исходную схему (рис.1.22) и приводим её к расчётной (рис.1.23).

Для этого линию действия силы P переносим на параллельную линию, проходящую через опору A .

Перенос осуществляем, согласно правилам теоретической механики, с добавлением соответствующего момента $M = P \cdot l = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

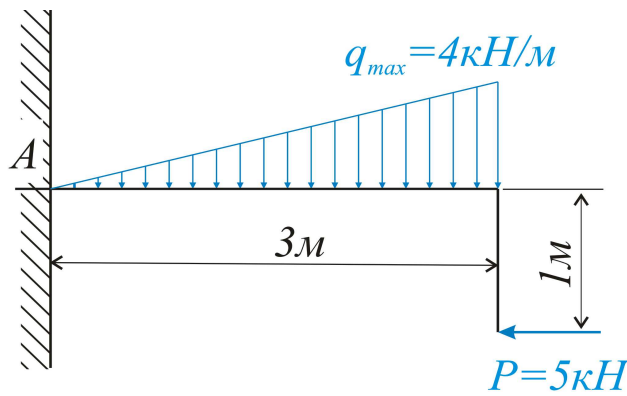


Рис. 1.22. К примеру 1.4. Исходная схема

Кроме этого, заменяем линейную распределённую нагрузку на сосредоточенный эквивалент Q , линия действия которого проходит через центр тяжести фигуры распределения (прямоугольного треугольника) и делит его основание l в пропорции $\frac{2}{3}l$ и $\frac{1}{3}l$. Величина эквивалента Q определяется площадью фигуры распределения (прямоугольного треугольника). Таким образом: $Q = \frac{1}{2} \cdot q_{max} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$.

Проведем систему вспомогательных взаимно перпендикулярных осей x и y . Рассмотрим опору A .

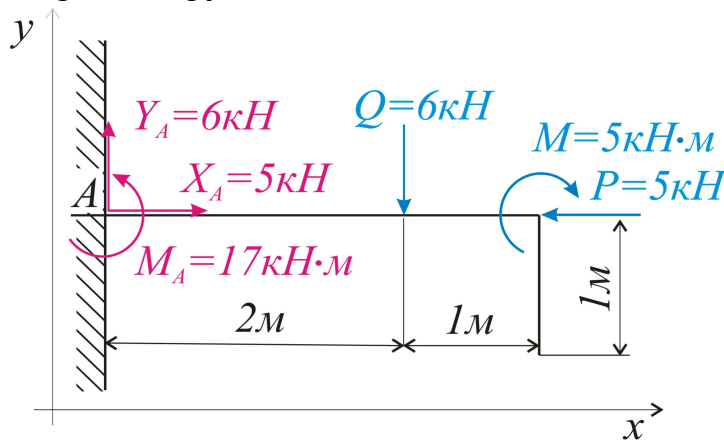


Рис. 1.23. К примеру 1.4. Расчётная схема

Данная опора представляет собой жёсткую заделку, запрещающую два линейных перемещения и одно угловое в плоскости чертежа. Обозначим реакции, препятствующие этим перемещениям, как X_A , Y_A , M_A . Определим эти реакции, используя уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил.

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Первое уравнение:

$$\sum X = 0 \Rightarrow$$

Определяем сумму проекций всех сил на ось x и приравниваем её к нулю.

$$X_A - P = 0 \Rightarrow X_A = P \Rightarrow X_A = 5 \text{ кН}.$$

Второе уравнение:

Определяем сумму проекций всех сил на ось y и приравниваем её к нулю.

$$Y_A - Q = 0 \Rightarrow Y_A = Q \Rightarrow Y_A = 6 \text{ кН}.$$

Третье уравнение.

Определяем сумму моментов всех сил относительно точки A и приравниваем её к нулю.

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow M_A - Q \cdot 2 - M = 0 \Rightarrow M_A = Q \cdot 2 + M = 6 \cdot 2 + 5 \Rightarrow M_A = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, опорные реакции жесткой заделки составят:

$$X_A = 5 \text{ кН};$$

$$Y_A = 6 \text{ кН};$$

$$M_A = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пример 1.5

Для балки, изображенной на рисунке, определить опорные реакции \vec{R}_A и \vec{R}_B .

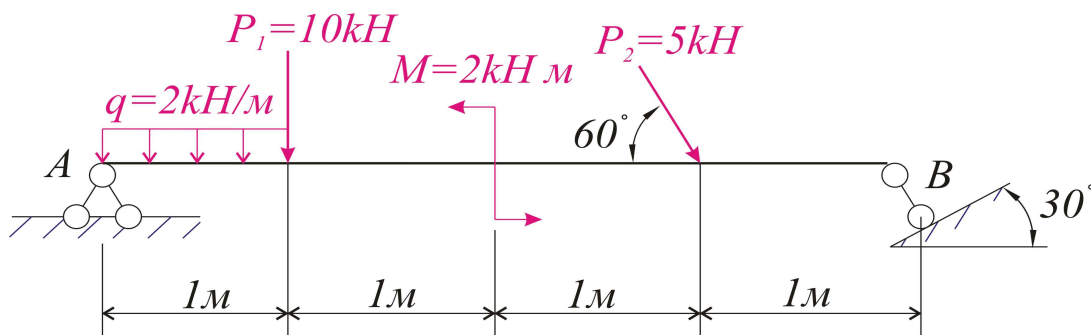


Рис. 1.24. К примеру 1.5. Исходная схема

Решение. Анализируем исходную схему. Согласно данным задания опора A - шарнирно-неподвижная, полная реакция которой R_A , может быть представлена в виде векторной суммы X_A и Y_A . Опора B - шарнирно подвижная, поэтому направление реакции R_B известно: оно перпендикулярно к наклонной поверхности.

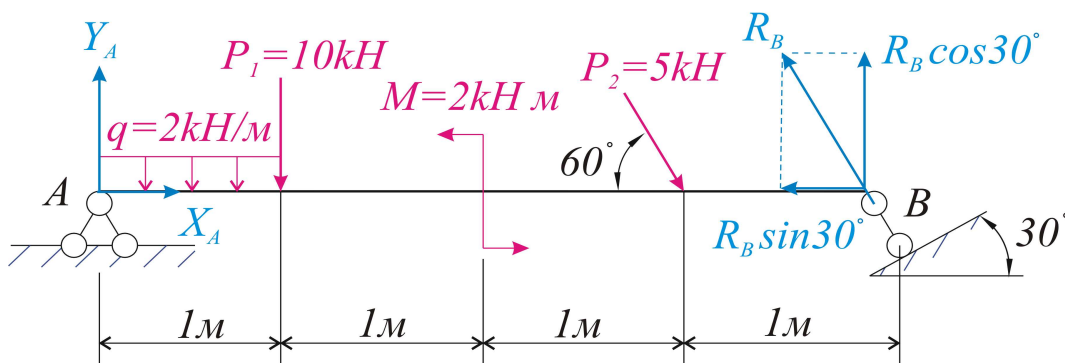


Рис. 1.25. К примеру 1.5. Исходная схема с приложенными неизвестными реакциями

Приведём исходную схему, рис.1.25 к расчётной, рис.1.26, заменяя наклонную силу P_2 (а также реакцию R_B) их горизонтальными и вертикальными составляющими, а также заменяя распределённую нагрузку сосредоточенным эквивалентом Q . Величина последнего равна площади фигуры распределения, а линия действия проходит через центр фигуры распределения.

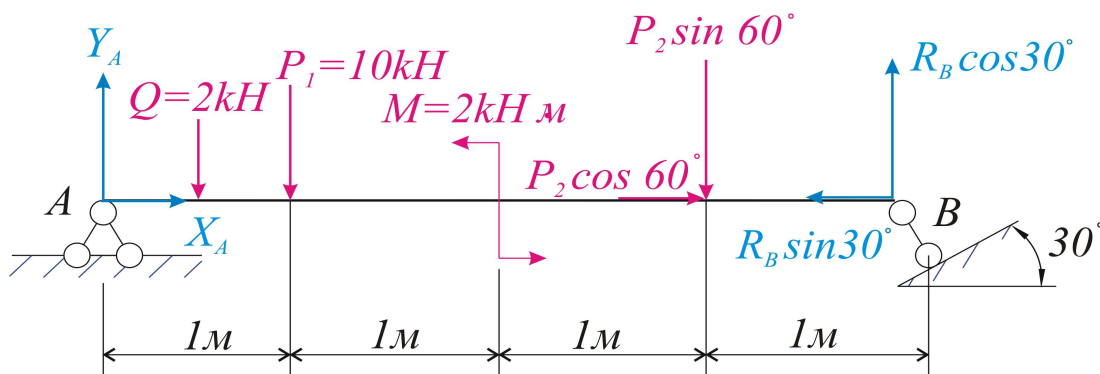


Рис. 1.26. К примеру 1.5. Расчётная схема

Полученная расчётная схема отображает плоскую произвольную систему сил, для которой должно выполняться условие статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum X = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0. \\ -Q \cdot 0,5 - P_1 \cdot 1 + M - P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 + R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 &= 0 \Rightarrow \\ R_B &= \frac{Q \cdot 0,5 + P_1 \cdot 1 - M + P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3}{4 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1 - 2 + 5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3}{4 \cdot \cos 30^\circ} \Rightarrow \\ R_B &\approx 6,35 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\begin{aligned} \sum M_B(\vec{F}_i) &= 0. \\ -Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3,5 + P_1 \cdot 3 + M + P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 &= 0 \Rightarrow \\ Y_A &= \frac{Q \cdot 3,5 + P_1 \cdot 3 + M + P_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1}{4} = \frac{2 \cdot 3,5 + 10 \cdot 3 + 2 + 5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1}{4} \Rightarrow \\ Y_A &= 10,83 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Рассмотрим третье уравнение:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0. \\ X_A + P_2 \cdot \cos 60^\circ - R_B \sin 30^\circ &= 0 \Rightarrow \\ X_A &= R_B \cdot \sin 30^\circ - P_2 \cdot \cos 60^\circ = 6,35 \cdot \sin 30^\circ - 5 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \\ X_A &= 0,675 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Выполним проверку, для этого используем дополнительное уравнение равновесия: $\sum Y = 0$.

$$Y_A - Q - P_1 - P_2 \cdot \sin 60^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$10,83 - 2 - 10 - 5 \cdot \sin 60^\circ + 6,35 \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow -5,5 + 5,5 = 0. \text{ Истинно.}$$

В соответствии с правилами векторных сумм и учётом свойств опор покажем направления полных реакций \vec{R}_A и \vec{R}_B , рис. 1.27.

Значение $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0,675^2 + 10,83^2} = 10,85 \text{ kH}$.

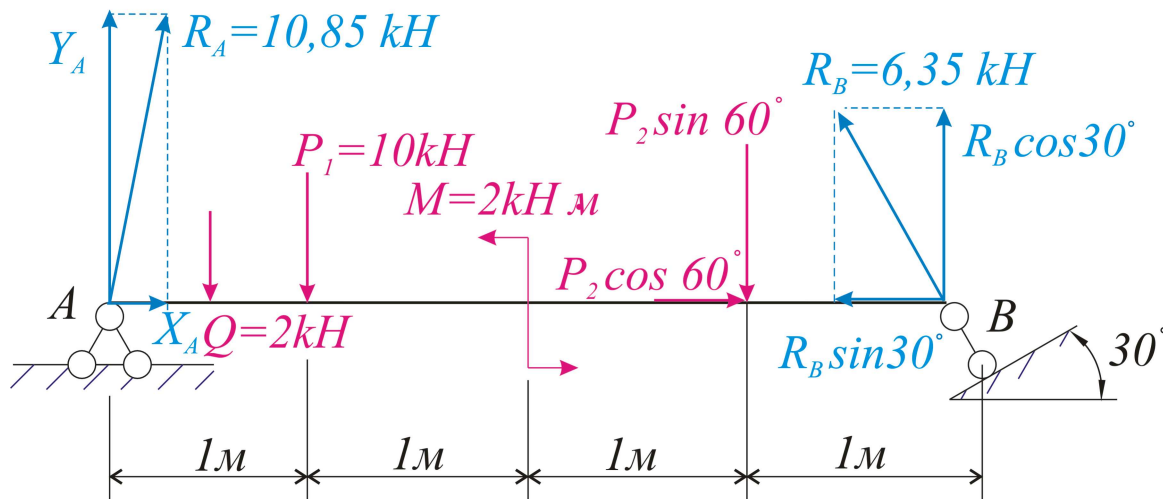


Рис.1.27. К результатам решения примера 1.5

1.1.10. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент силы \vec{F} относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z , взятую относительно точки O_1 пересечения этой оси с плоскостью:

$$M_z(\vec{F}) = M_{O_1}(\vec{F}_{xy}), \text{ или}$$

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_{O_1}(\vec{F})| \cos \gamma, \quad (1.26)$$

где $M_z(\vec{F})$ - момент силы \vec{F} относительно оси z ; γ - угол между вектором $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ и осью z , или это угол между нормальными к плоскостям, или угол между плоскостями ΔOAB и $\Delta O_1A_1B_1$. Момент силы относительно оси, также как и проекция вектора на ось, является скалярной величиной, значение которой можно определить по формуле:

$$M_z(\vec{F}) = 2 \text{ пл. } \Delta O_1A_1B_1 = 2 \text{ пл. } \Delta OAB \cos \gamma = \pm F_{xy} h_{xy}. \quad (1.27)$$

Момент силы \vec{F} относительно оси z имеет знак плюс, когда поворот, который стремится совершить сила \vec{F} , при взгляде с положительного конца оси, виден против хода часовой стрелки, и знак минус - при направлении по ходу часовой стрелки.

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в

одной плоскости.

2. Если линия действия силы параллельна оси, то момент относительно этой оси равен нулю.

3. Если вектор силы лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси, то момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между линией действия этой силы и осью.

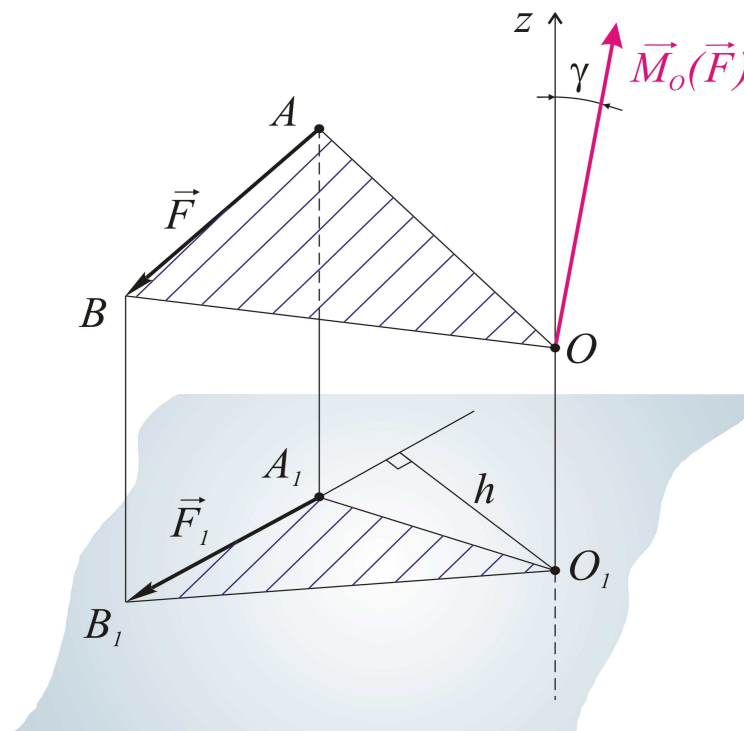


Рис. 1.28. К определению момента силы относительно оси

1.1.11. ТРЕНИЕ

Тело, неровностями поверхностей которого нельзя пренебречь, называется *шероховатым телом*.

Трение подразделяют на *трение покоя* и *трение движения*. Трение движения, в свою очередь, подразделяют на *трение скольжения*, *трение качения*, *трение качения с проскальзыванием*.

1.1.12. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

В случае, если одно тело стремится перемещаться по поверхности другого тела, в плоскости соприкосновения возникает сила сопротивления относительно скользящему, называемая *силой трения скольжения*. Законы трения скольжения можно сформулировать следующим образом:

1. Попытка перемещения одного тела по поверхности другого сопровождается возникновением силы трения, которая может принимать значения от нуля до величины, соответствующей предельной силе трения. Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действуют на тело силы стремятся его переместить.

2. Предельная сила трения F_{np} равна произведению статического коэффициента трения на нормальную составляющую приложенных сил:

$$F_{np} = f_0 N. \quad (1.28)$$

Статический коэффициент трения - безразмерная величина.

3. Значение f_0 в определенном диапазоне не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей, но зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей, температуры, наличия и рода смазки.

Значения некоторых коэффициентов трения скольжения:

$f_0 = 0,4 \dots 0,7$ - дерево по дереву,

$f_0 = 0,15 \dots 0,25$ - металл по металлу,

$f_0 = 0,027$ - металл по льду.

1.1.13. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Равновесие, имеющее место при $F_{np} = f_0 N$, называется *предельным равновесием*.

Если $F_{np} > f_0 N$, сила трения скольжения будет равна:

$$F_{mp} = f N, \quad (1.28')$$

где f - динамический коэффициент трения скольжения.

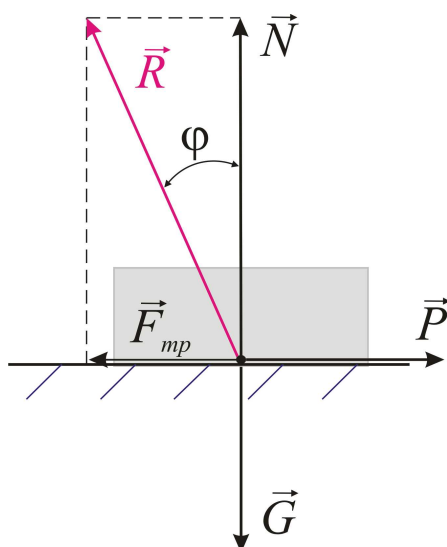


Рис.1.29. К определению трения скольжения

Нормальная реакция \vec{N} опорной поверхности и сила трения \vec{F}_{mp} дают равнодействующую \vec{R} , которая называется *полной реакцией опорной поверхности*.

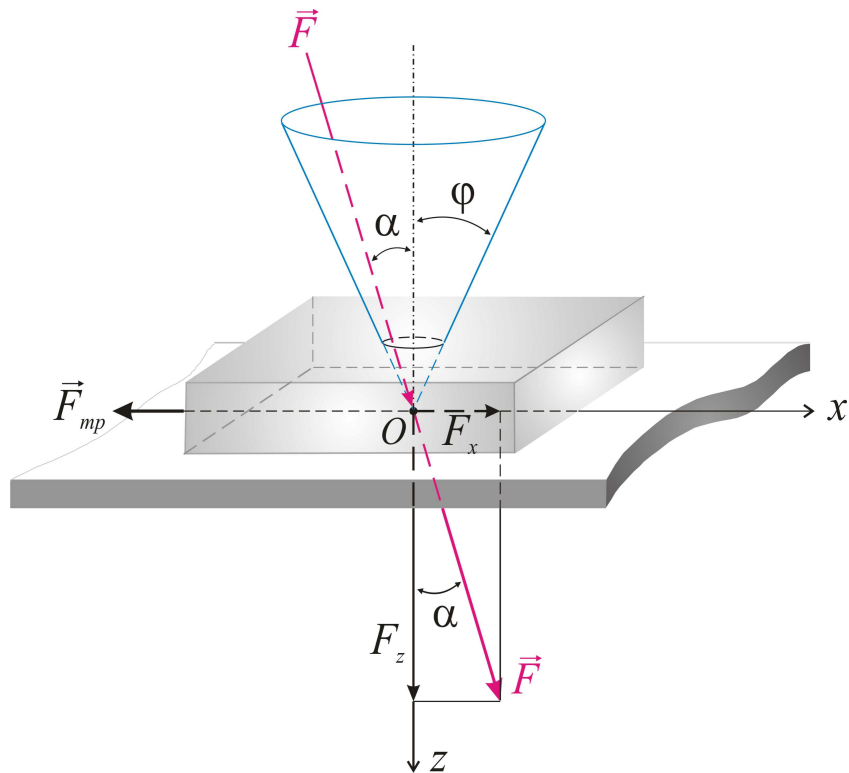


Рис. 1.30. Конус трения

Полная реакция \vec{R} составляет с нормалью угол φ , который называется *углом трения*. Очевидно, что $f_0 = \operatorname{tg} \varphi$. Если коэффициент трения одинаков по всем направлениям, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, который называется *конусом трения*.

Физический смысл конуса трения заключается в том, что если линия действия равнодействующей системы сил, приложенных к данному телу, лежащему на шероховатой поверхности, лежит внутри данной виртуальной конической поверхности, то под действием такой системы сил данное тело будет находиться в состоянии покоя.

1.1.14. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА НА НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для того, чтобы тело на шероховатой поверхности находилось в равновесии под действием только собственного веса (рис. 1.31), необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$f \geq \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.29)$$

Сила трения в таком случае определяется как

$$F_{mp} = f \cdot G \cdot \cos \alpha, \quad (1.30)$$

где $G = mg$ - вес тела.

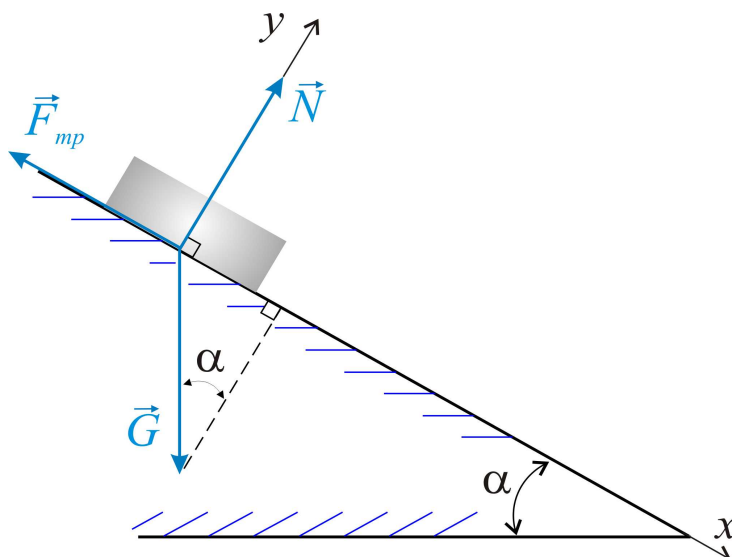


Рис. 1.31. К определению равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости

1.1.15. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Рассмотрим процесс качения цилиндра весом G и радиусом r по горизонтальной опорной поверхности. При приложении весьма малой силы F тело будет продолжать находиться в состоянии покоя. Под действием веса G происходит деформация цилиндра и опорной поверхности в области соприкосновения, при этом происходит перераспределение давлений на опорную поверхность, и полная реакция N' пройдет через точку O' и через точку C .

Составим уравнение равновесия для данной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum M_{O'}(\vec{F}_i) &= 0 \Rightarrow \\ -F \cdot r + G \cdot k &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Входящая в уравнение равновесия величина $F \cdot r$ называется *моментом качения* M . Величина $G \cdot k$, также входящая в уравнение, называется *моментом трения* $M_{тр}$. Максимальное значение плеча k - называется *коэффициентом трения качения*. Размерность - в единицах длины: $[м]$.

Некоторые значения коэффициентов трения качения, в $[см]$:

Мягкая сталь по мягкой стали.....	0,005
Закаленная сталь по закаленной стали.....	0,001
Чугун по чугуну.....	0,005
Дерево по дереву.....	0,03...0,04
Резина по асфальту.....	0,24

Определяем силу, необходимую для того, чтобы начался процесс качения:

$$F = \frac{k \cdot G}{r}. \quad (1.32)$$

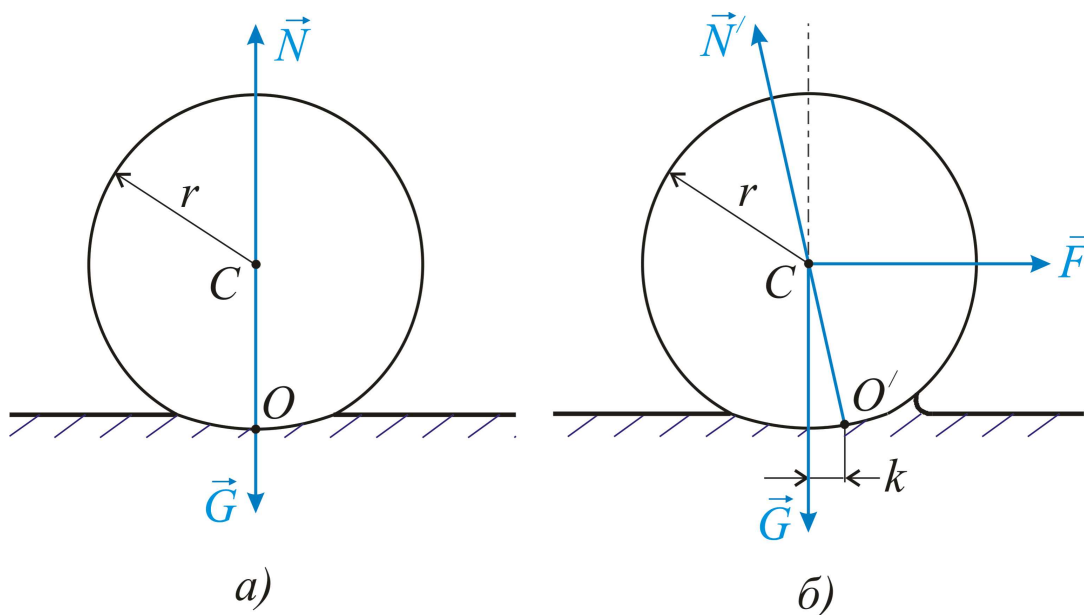


Рис. 1.32. К понятию трения качения: а) тело качения на шероховатой опорной поверхности под действием только силы тяжести, б) тело качения на шероховатой опорной поверхности, находящееся под действием силы тяжести и весьма малой силы \vec{F} , пытающейся осуществить процесс качения

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. $M > M_{mp}$ и $P < F_{mp}$ - только качение;
2. $M < M_{mp}$ и $P > F_{mp}$ - только скольжение;
3. $M > M_{mp}$ и $P > F_{mp}$ - качение с проскальзыванием;
4. $M < M_{mp}$ и $P < F_{mp}$ - состояние покоя.

1.1.16. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим систему параллельных сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, приложенных в точках A_1, \dots, A_n (рис. 1.33). Такая система имеет равнодействующую, модуль которой

$$R = \sum F_k. \quad (1.33)$$

При повороте данной системы сил на некоторый угол α линии действия каждой из представленных сил будут сохранять свою параллельность, также поворачиваясь на угол α .

Модуль равнодействующей в таком случае будет оставаться величиной постоянной, но направление равнодействующей всякий раз будет меняться.

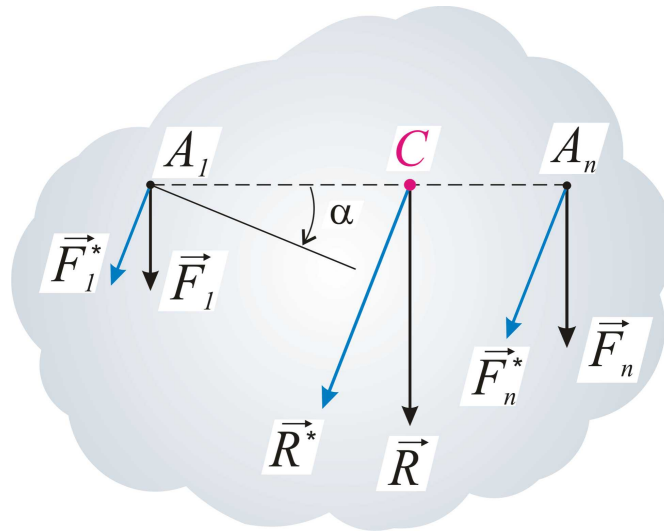


Рис. 1.33. К определению положения центра системы параллельных сил

Можно попытаться определить такую геометрическую точку C , через которую будет проходить линия действия равнодействующей системы при любых её углах поворота. Такая точка C называется *центром параллельных сил*.

Координаты центра параллельных сил определяются при помощи последовательного применения теоремы Вариньона относительно оси. В окончательном виде формулы для пространственной системы параллельных сил:

$$x_C = R^{-1} \cdot \sum F_k x_k; \quad y_C = R^{-1} \cdot \sum F_k y_k; \quad z_C = R^{-1} \cdot \sum F_k z_k. \quad (1.34)$$

Стационарным силовым полем называется область, где на помещенную в неё материальную точку действует постоянная по времени сила, зависящая от положения точки.

Нестационарным силовым полем называется область, где на помещенную в неё материальную точку действует сила, изменяющаяся по времени и зависящая от положения точки.

В качестве примера стационарного силового поля может выступать поле сил притяжения к Земле и т.д.

На тело, находящееся в окрестности земной поверхности, действует сила тяжести, вектор которой направлен к геометрическому центру Земли.

Силы тяжести можно считать параллельными силами. В таком случае центр параллельных сил тяжести называется центром тяжести твердого тела. Равнодействующая сил тяжести \vec{P} называется весом тела:

$$P = \sum p_k, \quad (1.35)$$

где p_k - сила тяжести, действующая на k - элементарную частицу твердого тела.

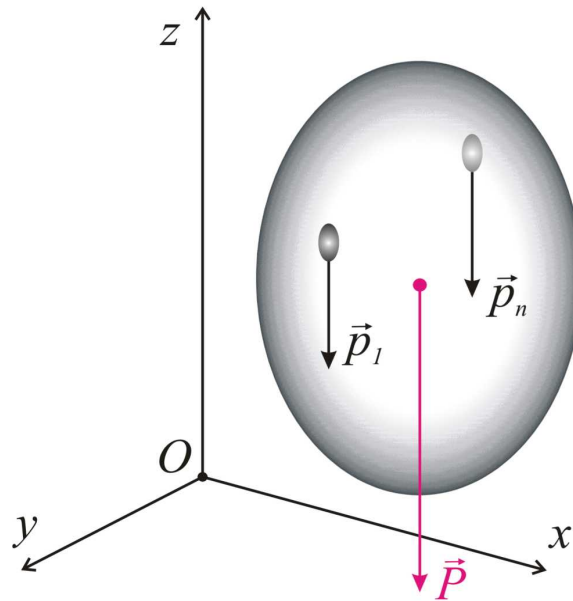


Рис. 1.34. К определению центра тяжести твердого тела

Координаты центра тяжести твердого тела C определяются по формулам:

$$x_C = P^{-1} \cdot \sum p_k x_k; \quad y_C = P^{-1} \cdot \sum p_k y_k; \quad z_C = P^{-1} \cdot \sum p_k z_k. \quad (1.36)$$

Координаты центра тяжести твердого однородного тела (центра тяжести объема) C могут быть выражены через элементарные объемы по формулам:

$$x_C = V^{-1} \cdot \sum V_k x_k; \quad y_C = V^{-1} \cdot \sum V_k y_k; \quad z_C = V^{-1} \cdot \sum V_k z_k. \quad (1.37)$$

При сложной форме твердого тела:

$$x_C = V^{-1} \cdot \int_V x dV; \quad y_C = V^{-1} \cdot \int_V y dV; \quad z_C = V^{-1} \cdot \int_V z dV. \quad (1.37')$$

Координаты центра тяжести для тонкой однородной пластины (плоского тела) могут быть выражены через элементарные площади по формулам:

$$x_C = A^{-1} \cdot \sum A_k x_k; \quad y_C = A^{-1} \cdot \sum A_k y_k; \quad (1.38)$$

При сложной форме плоского твердого тела:

$$x_C = A^{-1} \cdot \int_A x dA; \quad y_C = A^{-1} \cdot \int_A y dA; \quad (1.38')$$

Координаты центра тяжести для тела, состоящего из k тонких стержней:

$$x_C = L^{-1} \cdot \sum l_k x_k; \quad y_C = L^{-1} \cdot \sum l_k y_k; \quad z_C = L^{-1} \cdot \sum l_k z_k. \quad (1.39)$$

При сложной форме составляющих стержней:

$$\begin{aligned} x_C &= L^{-1} \cdot \int_L x dl; \\ y_C &= L^{-1} \cdot \int_L y dl; \\ z_C &= L^{-1} \cdot \int_L z dl. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Данные по площадям и объемам наиболее широко распространённых видов твердых тел систематизированы и приведены в различных справочниках.

Пример 1.6. Определить координаты центра тяжести C плоской фигуры, в системе осей xOy , рис.1.35.

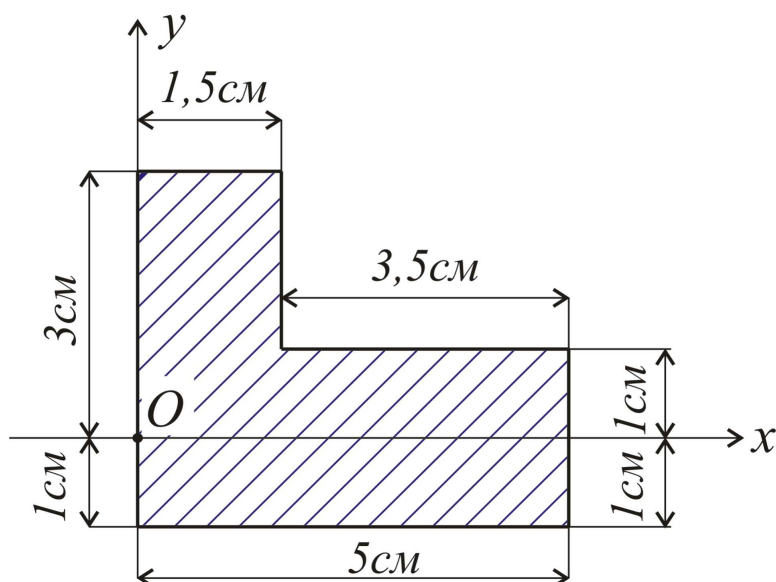


Рис.1.35. К условию примера 1.6

Решение. Рассмотрим сложную плоскую фигуру с площадью A как совокупность более простых плоских фигур A_1, A_2, A_3 , рис.1.36.

В таком случае координаты центра тяжести можно определить при помощи формул:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum (A_i \cdot x_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4,5 \cdot 0,75 + 5 \cdot 2,5 + 3,5 \cdot 3,25}{4,5 + 5 + 3,5} \approx 2,1 \text{ см.} \\ y_C &= \frac{\sum (A_i \cdot y_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4,5 \cdot 1,5 + 3,5 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5}{4,5 + 5 + 3,5} \approx 0,46 \text{ см.} \end{aligned}$$

Таким образом, центр тяжести C имеет координаты $(2,1; 0,46)$.

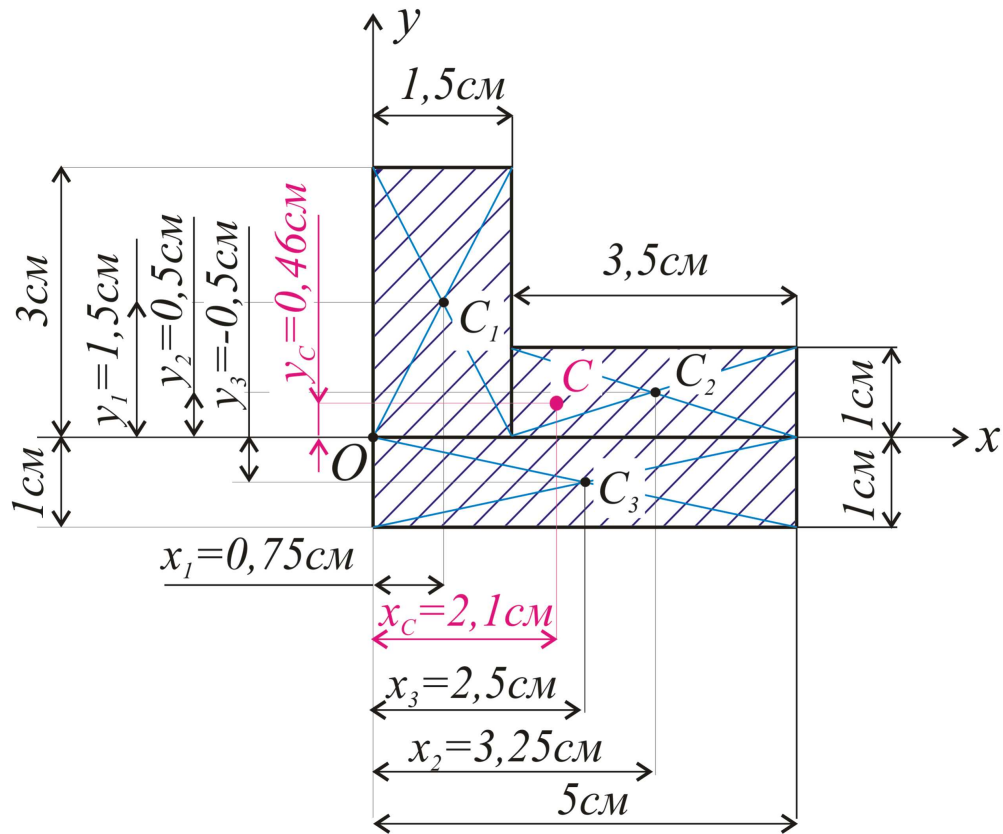


Рис. 1.36. К решению примера 1.6

Пример 1.7. Для плоского тонкого стержня с изогнутой осью, изображённого на рисунке 1.37, определить координаты центра тяжести в системе осей xOy .

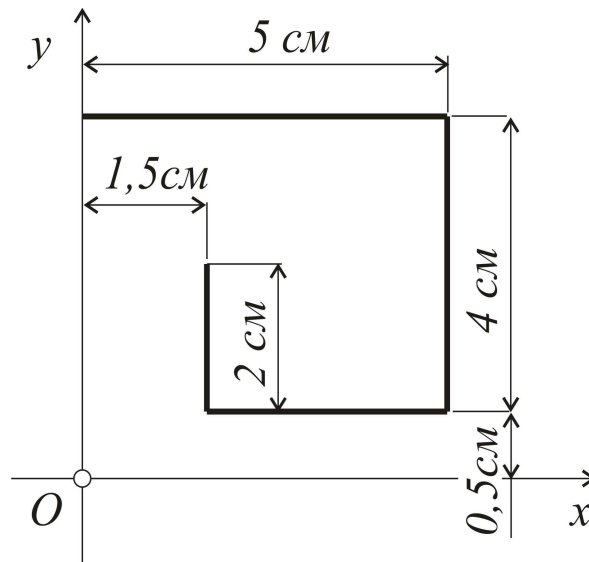


Рис. 1.37. К условию примера 1.7

Решение. Рассмотрим плоский тонкий стержень с изогнутой осью длиной L как совокупность прямолинейных стержней с длинами l_1, l_2, l_3, l_4 , и центрами тяжести в системе осей xOy - C_1, C_2, C_3, C_4 . Для определения координат центра тяжести всего ломаного стержня используем следующие формулы:

$$x_c = \frac{S_y}{L} = \frac{\sum (l_i \cdot x_i)}{\sum l_i} = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3 + l_4 \cdot x_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} = \frac{2 \cdot 1,5 + 3,5 \cdot 3,25 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2,5}{2 + 3,5 + 4 + 5} \approx 3,23 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{S_x}{L} = \frac{\sum (l_i \cdot y_i)}{\sum l_i} = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + l_3 \cdot y_3 + l_4 \cdot y_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \Rightarrow$$

$$y_c = \frac{2 \cdot 1,5 + 3,5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2,5 + 5 \cdot 4,5}{2 + 3,5 + 4 + 5} \approx 2,57 \text{ см.}$$

Таким образом, центр тяжести C имеет координаты $(3,23 \text{ см}; 2,57 \text{ см})$.

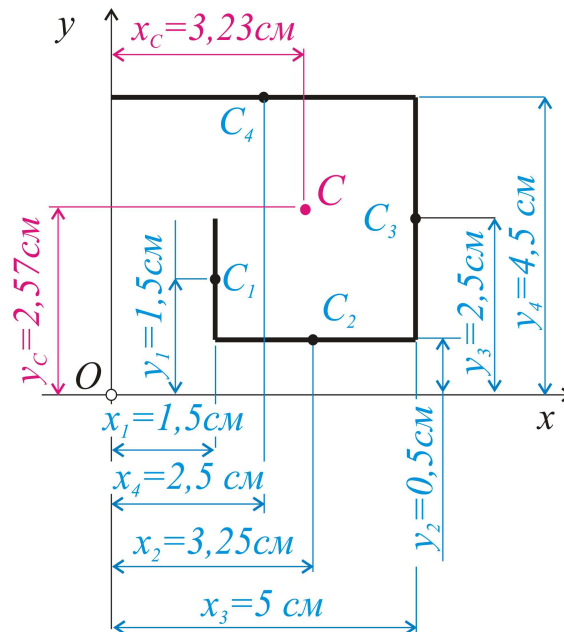


Рис.1.38. К результатам решения примера 1.7

Глава 2 КИНЕМАТИКА

1.2.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика - это раздел теоретической механики, изучающий движение твердых тел без учета действующих на них сил. В общем случае, движение разделяют на движение материальной точки и движение твердых тел. В кинематике изучение движения, как категории, начинают с изучения движения *точки*, то есть такого тела, размеры которого настолько малы по отношению к рассматриваемой системе, что ими пренебрегают. При этом выделяют такие кинематические характеристики движения, как *перемещение(траектория)*, измеряемое в СИ в $[м]$; *скорость(линейная)*, измеряемая в СИ в $[м/с]$; и *ускорение*, измеряемое в СИ в $[м/с^2]$. Для задания движения точки применяются три способа: векторный, координатный и естественный.

Пусть точка M , движение которой необходимо определить, перемещаясь в пространстве, описывает *траекторию* AB .

При *векторном способе* задания движения (рис. 1.39) положение точки в пространстве определяется её радиусом-вектором в системе декартовых координат:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}. \quad (1.40)$$

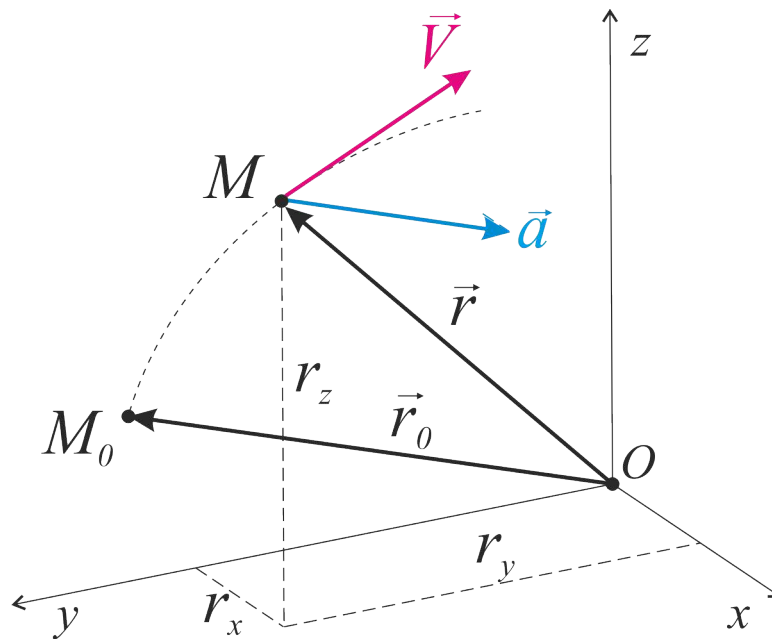


Рис 1.39. Векторный способ задания движения точки

В таком случае закон, по которому изменяется радиус-вектор, будет являться законом движения точки:

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (1.40')$$

Скорость точки M можно определить как

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.41)$$

а ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.42)$$

Вектор скорости точки \vec{V} всегда направлен по касательной к траектории движения точки в сторону её движения, (т.е. он определяет направление её движения) (см. рис. 1.39), а вектор ускорения - в сторону вогнутости её траектории.

При *координатном способе* задания движения (рис. 1.40) положение точки в пространстве определяется ее тремя координатами x, y, z относительно предварительно заданной декартовой системы координат. В общем случае при движении точки каждая из её координат будет непрерывно изменяться с течением времени.

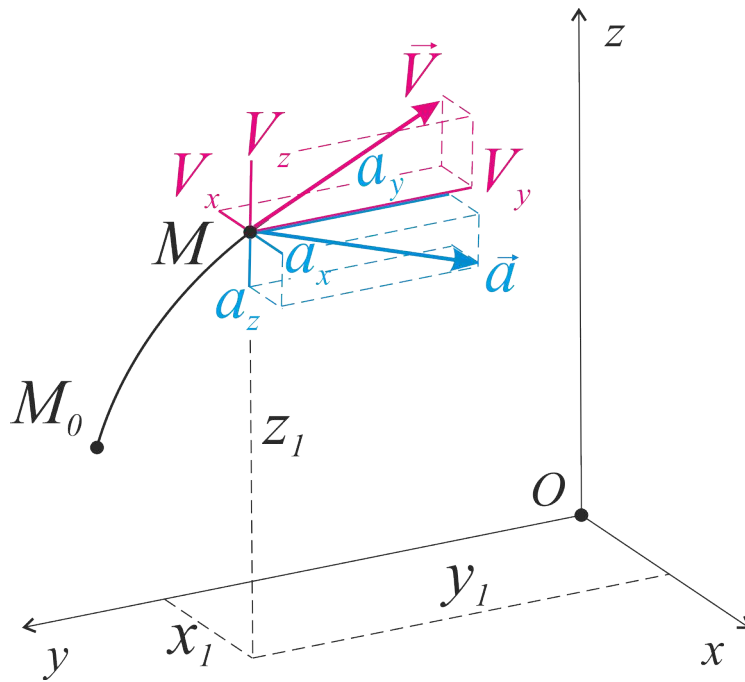


Рис. 1.40. Координатный способ задания движения

Таким образом, уравнения движения точки в координатной форме можно представить в виде системы уравнений её движения по отношению к параметрам x, y, z , зависящим от времени (системы параметрических уравнений):

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad (1.43)$$

Координатный и векторный способы задания движения являются между собой взаимосвязанными, так как радиус-вектор может быть представлен в системе декартовых координат следующим образом:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (1.44)$$

В таком случае $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$,

т.е.:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.45)$$

Модуль вектора скорости можно определить как

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (1.46)$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos \alpha_1 = \frac{V_x}{V}; \cos \beta_1 = \frac{V_y}{V}; \cos \gamma_1 = \frac{V_z}{V}. \quad (1.47)$$

По аналогии:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \cdot \vec{k},$$

т.е.:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, a_y = \frac{dV_y}{dt}, a_z = \frac{dV_z}{dt}. \quad (1.48)$$

Модуль вектора ускорения можно определить как

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.49)$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos \alpha_2 = \frac{a_x}{a}; \cos \beta_2 = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma_2 = \frac{a_z}{a}. \quad (1.50)$$

Естественный способ задания движения применяется (рис.1.41), как правило, в случаях, когда траектория движения известна изначально.

При естественном способе задания движения точки её положение в пространстве определяется криволинейной координатой $\check{s} = OM$.

Закон её изменения во времени является *законом движения точки в естественной форме*.

В отличие от координатного способа задания движения, кинематические характеристики точки рассматриваются не в отношении неподвижных декартовых осей x, y, z , а в отношении подвижной системы естественных осей (осей естественного трехгранника τ, n, b), совершающей движение вместе с рассматриваемой точкой по заданной траектории.

Скорость точки M при естественном способе задания движения определяется как

$$V = \frac{ds}{dt}. \quad (1.51)$$

Ускорение \vec{a} точки M при естественном способе задания движения представляется в виде составляющих \vec{a}_τ и \vec{a}_n ускорений, взятых по взаимно перпендикулярным естественным осям τ, n , т.е.:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.52)$$

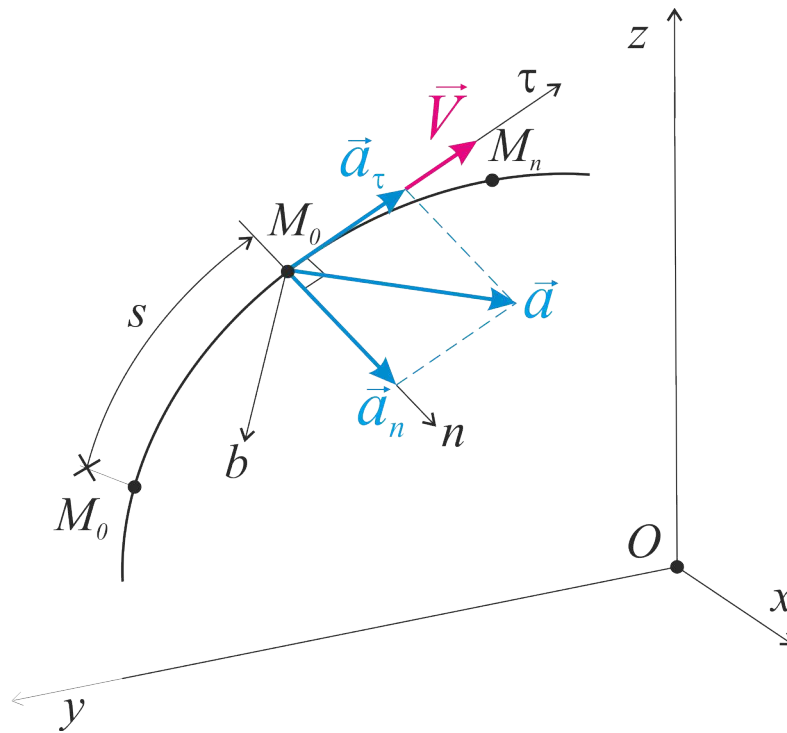


Рис. 1.41. Естественный способ задания движения

Абсолютную величину вектора *касательного* ускорения \vec{a}_τ можно определить следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad (1.53)$$

Касательное ускорение может принимать положительные, отрицательные значения или быть равным нулю.

Вектор касательного ускорения точки \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону движения точки (по направлению вектора скорости \vec{V}) в том случае, если $a_\tau > 0$, и по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону, противоположную движению, если $a_\tau < 0$.

Вектор *нормального* ускорения точки \vec{a}_n всегда перпендикулярен касательной к траектории τ и направлен в сторону вогнутости траектории по радиусу её кривизны в данной точке (по естественной оси n).

Абсолютное значение вектора \vec{a}_n можно определить как

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.54)$$

где ρ - радиус кривизны траектории (например, $\rho = r$ в любой геометрической точке траектории при движении точки по окружности радиуса r).

1.2.2. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. При *прямолинейном движении* $\rho = \infty \Rightarrow a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$, тогда полное ускорение точки $a = a_\tau = \frac{dV}{dt}$. На основании этого можно сделать вывод о том, что касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине.

2. *Равномерным криволинейным движением* называется такое криволинейное движение точки, при котором величина скорости $V = const$. Тогда $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$, а полное ускорение $a = a_n = \frac{V^2}{\rho}$. Соответственно, вектор полного ускорения будет направлен по нормали к траектории точки. На основании этого делаем вывод о том, что нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Закон равномерного криволинейного движения выглядит следующим образом:

$$s = s_0 + Vt. \quad (1.55)$$

В случае, когда $s_0 = 0 \Rightarrow s = Vt$ и $V = \frac{s}{t}$.

3. *Равномерное прямолинейное движение*. В этом случае $V = const$, $a = a_\tau = a_n = 0$.

4. *Равнопеременным криволинейным движением* называется такое криволинейное движение, при котором $a_\tau = const$. Закон этого движения выглядит следующим образом:

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (1.56)$$

Скорость точки при этом можно определить как

$$V = V_0 + a_\tau t. \quad (1.57)$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, такое движение является ускоренным, если убывает - замедленным. Если касательное ускорение постоянно и положительно, движение точки будет *равноускоренным*, если постоянно и отрицательно, то движение будет *равнозамедленным*.

5. *Гармонические колебания* - это такое движение точки, при котором расстояние x начала координат O меняется по закону, содержащему периодическую функцию, например: $x = A \cos kt$, где $A, k = const$. Точка при этом совершает колебания между начальным и конечным положениями l и

2 (рис. 1.42). Величина A , равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O , называется *амплитудой* (В качестве примера рассмотрен частный случай гармонических колебаний точки вдоль оси x). Промежуток времени T , в течение которого точка совершает колебание, называется *периодом колебаний*.

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad (1.58)$$

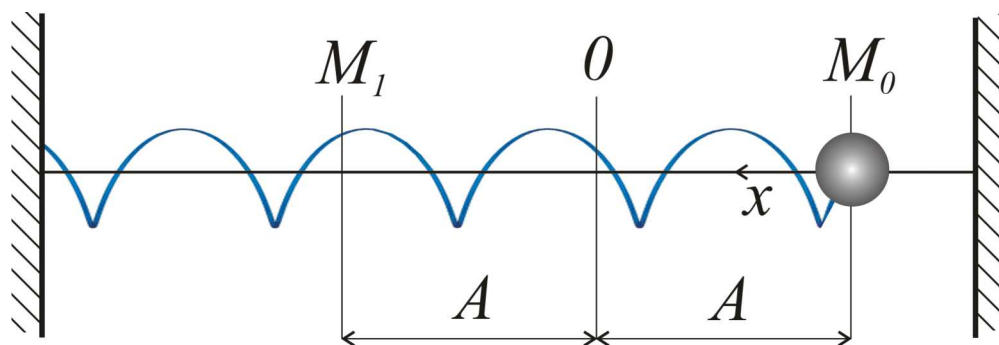


Рис. 1.42. Пример прямолинейного колебательного движения точки

Беря производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, найдем значения скорости и ускорения точки (в случае прямолинейных колебательных движений):

$$V = V_x = -Ak \sin kt, \quad a = a_x = -Ak^2 \cos kt. \quad (1.59)$$

Таким образом, при таком движении скорость, ускорение точки меняются по гармоническому закону. Гармонические колебания будут соответствовать также и закону $x = A \sin kt$. В таком случае движение точки начнётся из самого центра колебаний - точки O .

Гармонические колебания могут осуществляться по любой криволинейной траектории. Все вышеуказанное будет соответствовать и этому случаю, только полное ускорение будет определяться как $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Пример 1.8

Движение точки M в пространстве задано радиусом-вектором $\vec{r} = (0,5t^2 + 1)\vec{i} - 0,4t^3\vec{j} + 2t\vec{k}$, [м]. Определить модуль вектора скорости и вектора ускорения в момент времени $t = 1$ с, а также угол наклона вектора ускорения в этот момент времени к оси Oy .

Решение: Учитывая взаимосвязь векторного и координатного способа задания движения, учтём, что уравнения проекций радиуса-вектора на оси являются параметрическими уравнениями движения точки M :

$$r_x = X = (0,5t^2 + 1);$$

$$r_y = Y = -0,4t^3;$$

$$r_z = Z = 2t;$$

Продифференцировав данные уравнения движения, определим модуль вектора скорости точки:

$$V_x = \dot{r}_x = \dot{X} = (0,5t^2 + 1)' = t; \text{ при } t = 1 \text{ с} \rightarrow V_x = 1 \text{ м/с}.$$

$$V_y = \dot{r}_y = \dot{Y} = (-0,4t^3)' = 1,2t^2; \text{ при } t = 1 \text{ с} \rightarrow V_y = 1,2 \text{ м/с}.$$

$$V_z = \dot{r}_z = \dot{Z} = (2t)' = 2 \text{ м/с} = \text{const}.$$

Так как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \Rightarrow V = \sqrt{1^2 + 1,2^2 + 2^2} \Rightarrow V \approx 2,54 \text{ м/с}.$

Продифференцировав исходные уравнения ещё один раз, определим модуль вектора ускорения точки:

$$a_x = \ddot{r}_x = \ddot{X} = (0,5t^2 + 1)'' = (t)' = 1 \text{ м/с}^2 = \text{const};$$

$$a_y = \ddot{r}_y = \ddot{Y} = (-0,4t^3)'' = (1,2t^2)' = 2,4t; \text{ При } t = 1 \text{ с} \rightarrow a_y = 2,4 \text{ м/с}^2.$$

$$a_z = \ddot{r}_z = \ddot{Z} = (2t)'' = (2)' = 0.$$

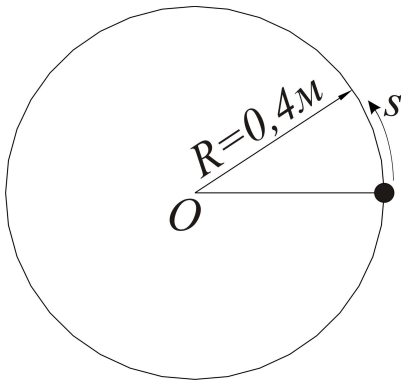
Так как $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \Rightarrow a = \sqrt{1^2 + 2,4^2 + 0^2} \Rightarrow a = 2,6 \text{ м/с}^2.$

Для определения угла наклона вектора ускорения к оси Oy воспользуемся выражением для второго направляющего косинуса вектора ускорения:

$$\cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}; \text{ где } \beta_1 = (\vec{a} \wedge Oy) \Rightarrow \beta_1 = \arccos\left(\frac{2,4}{2,6}\right) = 22,6^\circ.$$

Таким образом, необходимые данные задачи были определены.

Пример 1.9



Движение точки M происходит в плоскости, по окружности радиуса $R = 40 \text{ см}$ согласно закону

$$\check{s} = 0,2t^3 - \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 0,8t \text{ [м]}, \text{ рис. 1.43.}$$

Определить направление и модуль вектора полного ускорения в момент времени $t = 1 \text{ с}.$

Рис. 1.43. К условию примера 1.9

Решение: Пользуясь данными рисунка, установим положение точки M в заданный момент времени, для этого вначале определим криволинейную координату \check{s} :

$$\check{s} = 0,2 \cdot 1^3 - \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) + 0,8 \cdot 1 \Rightarrow \check{s} = 0,5 \text{ м}.$$

Определим значение центрального угла φ , соответствующего длине дуги $\check{s} = 0,5 \text{ м}.$

$$\varphi = \frac{\ddot{s}}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{0,5}{0,4} = 1,25 \text{ рад} \approx 71,25^\circ.$$

Отложим этот угол от начального положения в направлении движения и получим истинное положение точки M в заданный момент времени.

Способ задания движения в этой задаче является естественным, поэтому для определения скорости и касательного ускорения поэтапно продифференцируем исходный закон движения.

$$V = \frac{ds}{dt} = \left(0,2t^3 - \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 0,8t \right)' = 0,6t^2 + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} + 0,8;$$

При $t = 1 \text{ с} \Rightarrow$

$$V = 0,6 \cdot 1^2 + \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi \cdot 1}{3} + 0,8 \Rightarrow V \approx 2,3 \text{ м/с}.$$

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \left(0,2t^3 - \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 0,8t \right)'' = \left(0,6t^2 + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} + 0,8 \right)' \Rightarrow$$

$$a_\tau = 1,2t + \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{3}; \text{ При } t = 1 \text{ с} \Rightarrow a_\tau = 1,2 \cdot 1 + \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi \cdot 1}{3} \Rightarrow a_\tau \approx 1,75 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки определим по формуле: $a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow$

$$a_n = \frac{2,3^2}{0,4} \Rightarrow a_n \approx 13,23 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения определим по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{1,75^2 + 13,23^2} \Rightarrow a = 13,34 \text{ м/с}^2.$$

На рисунке изобразим в выбранном масштабе полученные вектора.

Вектор скорости \vec{V} направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (перпендикулярно радиусу), вектор касательного ускорения \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории в одну сторону с вектором скорости (так как $a_\tau > 0$).

Вектор нормального ускорения \vec{a}_n направлен перпендикулярно вектору касательного ускорения, в сторону вогнутости траектории.

Для удобства можно использовать разные масштабы для векторов скорости и ускорения.

В отношении векторов ускорения целесообразно определить отношение между его большей и меньшей составляющей.

$$\text{В нашем случае: } \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{13,23}{1,75} \approx 7,5.$$

Полученное отношение говорит о том, что откладываемая длина \vec{a}_n должна быть больше аналогичной длины \vec{a}_τ в 7,5 раза.

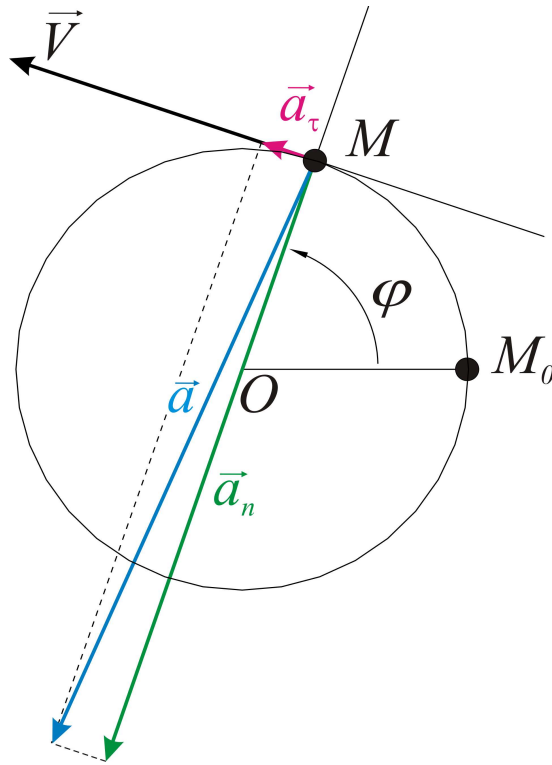


Рис. 1.44. К решению примера 1.9

Пример 1.10

Точка M движется в плоскости согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 1 - 5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ y = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3 \end{cases}, [см]$$

Определить траекторию движения точки, вектор скорости и ускорения в момент времени $t = 1 с$.

Решение:

Из параметрических уравнений исключаем t путем последовательного преобразования исходных уравнений, получая зависимость вида $y = f(x)$.

$$\begin{cases} x = 1 - 5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ y = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ y - 3 = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = (-5)^2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ (y - 3)^2 = 2^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{5^2} = \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ \frac{(y-3)^2}{2^2} = \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

Последнее выражение является уравнением эллипса, с центром в точке $O_1(1; 3)$ и размерами полуосей $a=5\text{ см}$ и $b=2\text{ см}$.

Положение точки $M(x_M; y_M)$ в заданный момент времени $t=1\text{ с}$ определится подстановкой данного значения в исходные параметрические уравнения.

$$x = 1 - 5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \Rightarrow x_M = 1 - 5 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_M = -1,5 \text{ см};$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) + 3 \Rightarrow y_M = 2 \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) + 3 \Rightarrow y_M = 4,732 \text{ см}.$$

Таким образом, в заданный момент времени $t=1\text{ с}$ точка занимает положение: $M(-1,5\text{ см}; 4,732\text{ см})$.

Определим вектор скорости точки в заданный момент времени. Для этого дифференцируем параметрические уравнения, получая проекции вектора скорости по осям, а затем определим модуль вектора скорости в целом. Положение вектора скорости определится путем геометрического сложения его проекций, отложенных от точки M (положительные проекции должны быть отложены от точки M в сторону положительных направлений осей и наоборот).

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = \left(1 - 5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)' \Rightarrow V_x = -\frac{5\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \\ V_y = \dot{y} = \left(2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3\right)' \Rightarrow V_y = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{cases}, [\text{см/с}].$$

В момент времени $t=1\text{ с}$:

$$V_x = -\frac{5\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow V_x = -2,67 \text{ см/с}.$$

$$V_y = -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow V_y = -0,524 \text{ см/с}.$$

Модуль вектора скорости можно определить как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow$

$$V = \sqrt{(-2,67)^2 + (-0,524)^2} \Rightarrow V = 2,72 \text{ см/с}.$$

Определим вектор ускорения точки в заданный момент времени. Для этого дважды дифференцируем параметрические уравнения, получая проекции вектора ускорения по осям, а затем определим модуль вектора ускорения в целом.

Положение вектора ускорения определится путем геометрического сложения его проекций, отложенных от точки M (положительные проекции должны быть отложены от точки M в сторону положительных направлений осей и наоборот).

$$\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = \left(1 - 5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)'' = \left(-\frac{5\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)' \Rightarrow a_x = \frac{5\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \left(2\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3\right)'' = \left(-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)' \Rightarrow a_y = -\frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \end{cases} \quad [cm/c^2].$$

В момент времени $t=1 c$:

$$a_x = \frac{5\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow a_x = 0,685 cm/c^2.$$

$$a_y = -\frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow a_y = -0,475 cm/c^2.$$

Модуль вектора ускорения можно определить как $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{(0,685)^2 + (-0,475)^2} \Rightarrow a = 0,83 cm/c^2.$$

Вектор ускорения можно также представить в виде векторной суммы

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $a_\tau = \frac{(V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y)}{V} = \frac{-2,62 \cdot 0,685 + (-0,524) \cdot (-0,475)}{2,72} \Rightarrow a_\tau = -0,57 cm/c^2;$

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{|(-2,62) \cdot (-0,475) - (-0,524) \cdot 0,685|}{2,72} \Rightarrow a_n = 0,59 cm/c^2.$$

Тогда $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \Rightarrow a = \sqrt{(-0,57)^2 + 0,59^2} \Rightarrow a \approx 0,83 cm/c^2.$

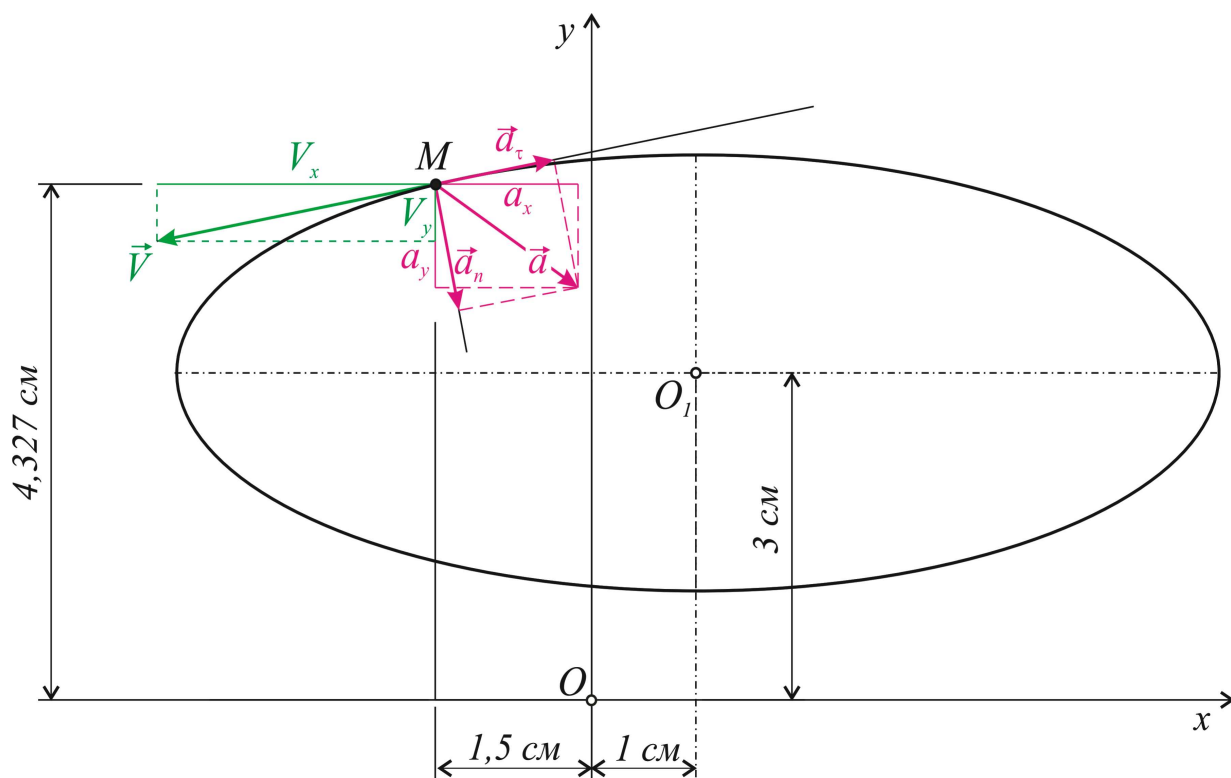


Рис. 1.45. К расчёту примера 1.10

Значение a фактически совпадает с полученным ранее, что свидетельствует о правильности расчёта. Вектор касательного ускорения направлен по касательной траектории движения точки (по линии действия вектора скорости \vec{V}) в противоположную ему сторону (т.к. $a_\tau < 0$), поэтому наше движение в данный момент времени будет замедленным. Вектор нормального ускорения \vec{a}_n перпендикулярен вектору касательного ускорения \vec{a}_τ и направлен в сторону вогнутости траектории (к центру радиуса кривизны траектории движения в данный момент времени). В выбранных масштабах отобразим траекторию движения точки и её кинематические характеристики.

1.2.3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, сохраняет параллельность своему первоначальному положению и после перемещения (рис.1.46). При поступательном движении тела траектории движения его точек могут быть не только прямыми, но и кривыми линиями. При поступательном движении все точки тела перемещаются по одинаковым по форме траекториям, имеют в любой момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения. При поступательном движении равная для всех точек тела скорость V называется скоростью поступательного движения тела, а ускорение a - ускорением поступательного движения тела.

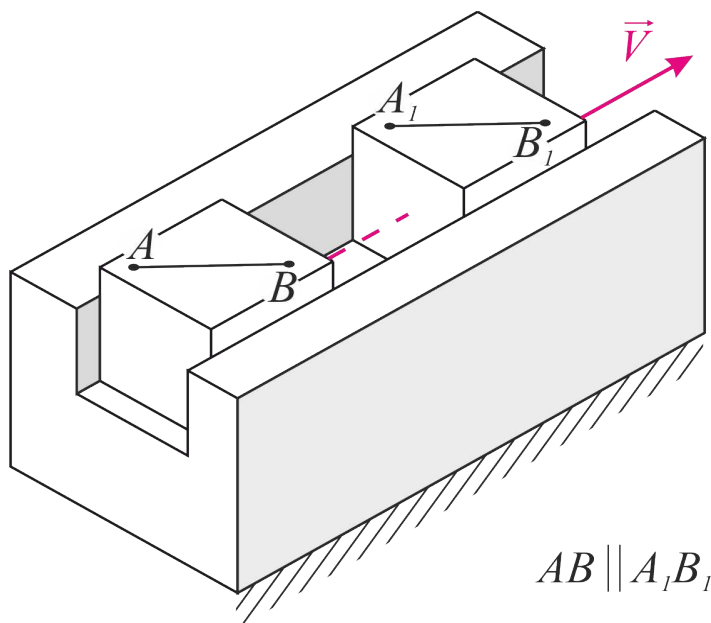


Рис. 1.46. Поступательное движение ползуна вдоль неподвижной направляющей

Понятие скорости и ускорения тела имеют смысл только при поступательном движении.

1.2.4. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие данному телу или неизменно с ним связанные, остаются все время неподвижными. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угловое перемещение* φ , *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε .

Рассмотрим данные понятия, используя схему, изображенную на рис. 1.47. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая z называется *осью вращения*. Для определения кинематических характеристик движения проведем плоскость I - неподвижную, и возьмём плоскость II - представляющую собой тонкую пластину (твердое тело), вращающуюся относительно оси AB .

Положение тонкой пластины (плоскости II) в любой момент времени будет определяться углом φ между плоскостями I и II , взятым с соответствующим знаком, называемым *угловым перемещением* и измеряемым в СИ в $[rad]$.

Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки, видимого со стороны положительного направления оси вращения z .

Таким образом, для определения положения тела в любой момент времени можно использовать закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = f(t)$.

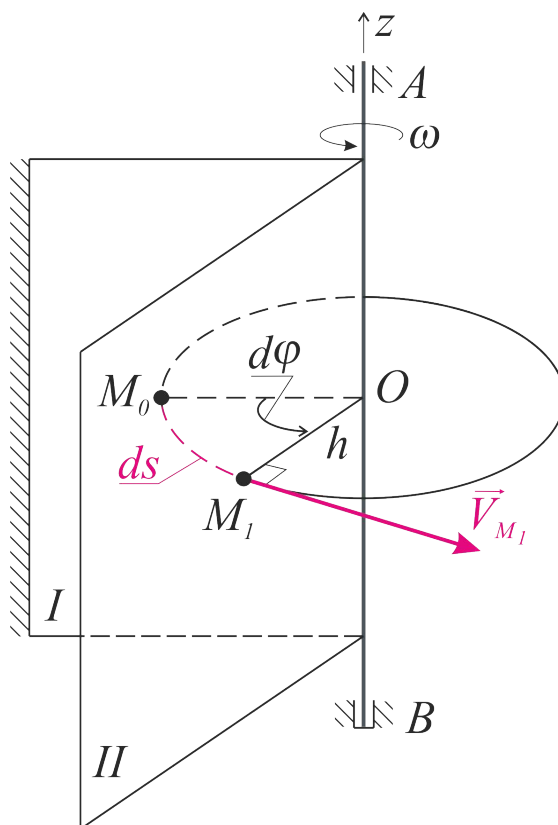


Рис. 1.47. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим понятие *угловой скорости* ω . Мгновенная угловая скорость определяется по формуле:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.60)$$

Таким образом, величина угловой скорости в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени.

При вращении против хода часовой стрелки, видимого с положительного направления оси вращения, считается, что $\omega > 0$; и $\omega < 0$, когда вращение видимо происходящим по ходу часовой стрелки. Размерность угловой скорости $[сек^{-1}]$ или $[рад/сек]$.

В технике для характеристики равномерного вращения используют техническую величину - *частоту вращения* n , измеряемую в $\left[\frac{об}{мин} \right]$ или $[мин^{-1}]$. Угловая скорость ω связана с частотой вращения n следующей зависимостью:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n. \quad (1.61)$$

Угловую скорость можно изобразить виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен ω и который направлен параллельно оси вращения тела в сторону, откуда его вращение видимо происходящим против часовой стрелки.

Рассмотрим понятие *углового ускорения* ε . Мгновенное угловое ускорение определяется согласно выражению:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.62)$$

С учетом существующей дифференциальной зависимости угловой скорости и углового перемещения угловое ускорение можно выразить как

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.63)$$

Таким образом, величина углового ускорения тела в данный момент времени равна первой производной угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени. Размерность углового ускорения в системе СИ - $[сек^{-2}]$ или $[рад/сек^2]$.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение считается ускоренным, а если убывает – замедленным. Угловое ускорение тела можно изобразить виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного параллельно оси вращения.

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 1.48, а), и направлено противоположно - в случае замедленного вращения (см. рис. 1.48, б).

Следует заметить, что угловая скорость и ускорение одинаковы в любых точках твердого тела. Являясь векторными величинами, они могут быть приложены к любой точке данного тела в полном соответствии с правилами выбора их направлений.

Если угловая скорость $\omega = \text{const}$ ($d\varphi = \omega dt$), то вращение тела считается равномерным.

Закон *равномерного вращения* по своей структуре аналогичен закону при равномерном поступательном движении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t. \quad (1.64)$$

Если $\varphi_0 = 0$, то:

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (1.65)$$

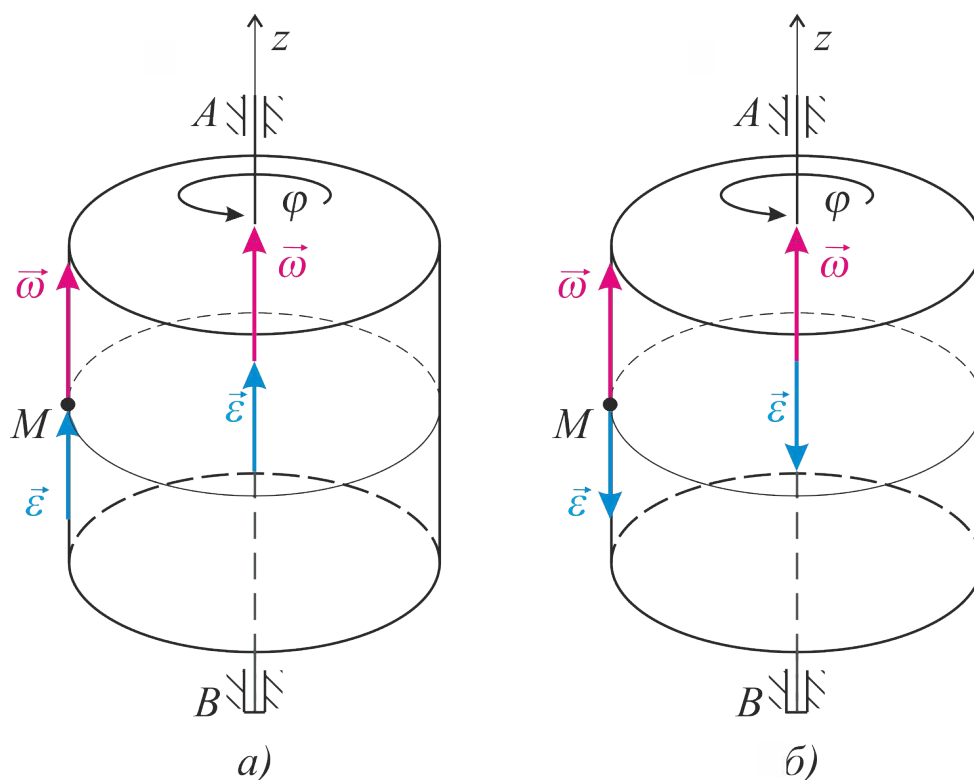


Рис. 1.48. Векторное представление угловой скорости и ускорения твердого тела:
а) при ускоренном вращении; б) при замедленном вращении

Для *равнопеременного вращательного движения* (в случае $\varepsilon = \text{const}$) закон движения примет вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.66)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.67)$$

Если величины ω , ε одного знака, вращение будет *равноускоренным*, разных - *равнозамедленным*.

Рассмотрим понятие *линейной* или *окружной скорости* точки тела. Величина линейной скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела ω на расстояние h этой точки до оси вращения.

$$V = h \cdot \omega. \quad (1.68)$$

Ускорения точек тела, исходя из формул: $a_\tau = \frac{dV}{dt}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho}$; $\rho = h$, определяются:

$$a_\tau = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon; \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h} = h\omega^2. \quad (1.69)$$

Направления векторов \vec{a}_τ и \vec{a}_n аналогичны направлениям этих величин при рассмотрении перемещений материальной точки (см. п. 1.2.1).

Полное ускорение с учётом формулы $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ определяется следующим образом:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.70)$$

Полные ускорения всех точек вращающегося тела прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения и образуют один угол μ с радиусами описываемых ими окружностей, величину которого можно определить:

$$\mu = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \quad (1.71)$$

Пример 1.11. Механизм, изображённый на рисунке, совершает движение. На бруске CD на расстоянии 1 м от шарнира C жестко закреплен груз. Определить вектор скорости и ускорения центра тяжести груза точки E в момент времени $t = 1\text{ с}$, рис. 1.49, если невесомый шарнир AC совершает вращательное движение согласно закону $\varphi = 0,52 t^3$, $[\text{рад}]$ и $AC = BD = 2\text{ м}$.

Решение: Определим положение механизма, в момент времени $t = 1\text{ с}$. Для этого рассчитаем угол, соответствующий заданному положению:

$$\varphi = 0,52 \cdot 1^3 \approx 30^\circ.$$

Сообщим данное перемещение невесомому шарниру AC и убедимся в параллельности траекторий перемещения любых точек стержня CD , а также жестко связанной с ним точки E .

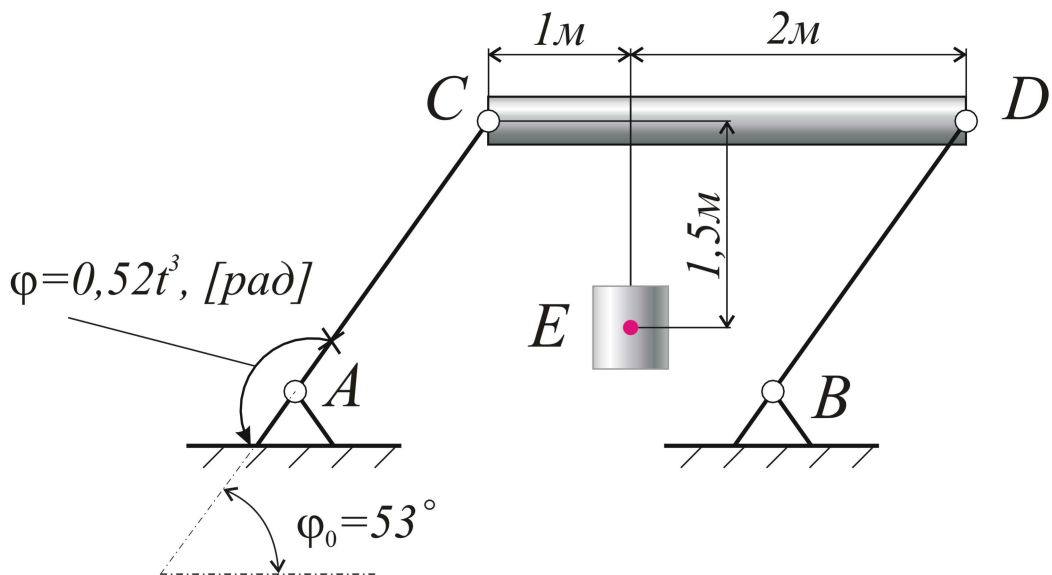


Рис. 1.49. К условию примера 1.11

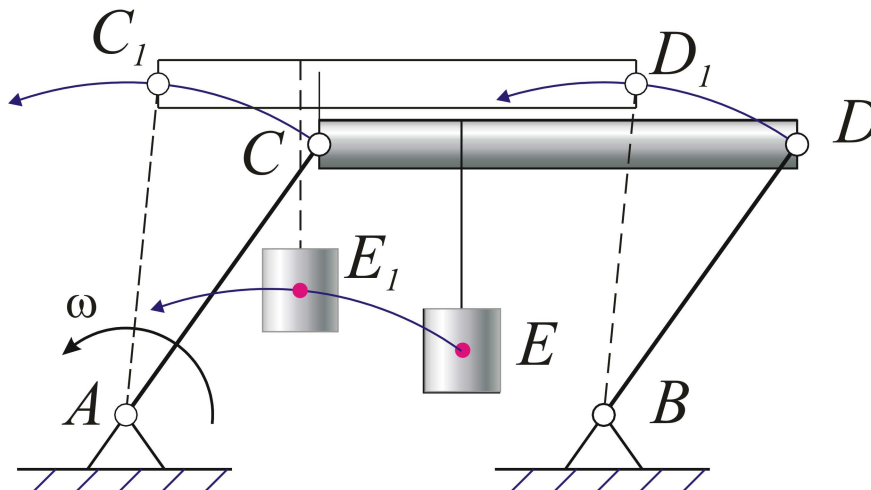


Рис. 1.50. К ходу решения примера 1.11

Отсюда, согласно определению, стержень CD совершает поступательное движение, при котором векторы скорости и ускорения любых точек имеют в рассматриваемый момент времени одинаковые направления и значения. Поэтому для определения скорости и ускорения точки E достаточно определить скорость и ускорение любой точки, принадлежащей стержню CD .

В качестве такой точки в данной задаче нужно использовать точку C , одновременно принадлежащую двум звеньям AC и BD , направление скорости и ускорения которой определяются из рассмотрения вращательного движения звена AC относительно точки A .

Определим угловую скорость звена AC в момент времени $t=1\text{ c}$.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (0,52t^3)' = 1,56t^2. \text{ В момент времени } t=1\text{ c} \quad \omega = 1,56\text{ c}^{-1}.$$

Определим угловое ускорение звена AC в момент времени $t=1\text{ с}$.

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = (0,52t^3)'' = 3,12t. \text{ В момент времени } t=1\text{ с } \varepsilon = 3,12\text{ с}^{-2}.$$

Линейную скорость точки C в момент времени $t=1\text{ с}$ можно определить по формуле:

$$V_C = \omega \cdot |AC| = 1,56 \cdot 2 = 3,12\text{ м/с}.$$

Направлен вектор скорости в сторону вращения звена AC по касательной к траектории движения (перпендикулярно звену AC).

Разложим вектор полного ускорения точки C на касательную \vec{a}_C^τ и нормальную \vec{a}_C^n составляющие. Их модули определим по формулам

$$a_C^n = \omega^2 \cdot |AC| = 1,56^2 \cdot 2 \approx 4,87\text{ м/с}^2.$$

$$a_C^\tau = \varepsilon \cdot |AC| = 3,12 \cdot 2 \approx 6,24\text{ м/с}^2.$$

Направления данных векторов определяются следующим образом.

Вектор касательного ускорения точки C - \vec{a}_C^τ направлен по касательной к траектории движения в одну сторону с её вектором скорости (т.к. $a_C^\tau > 0$).

Вектор нормального ускорения точки C - \vec{a}_C^n направлен перпендикулярно касательной траектории в сторону её вогнутости. В данной задаче вектор \vec{a}_C^n направлен вдоль AC к точке A .

Вектор полного ускорения точки C - \vec{a}_C представляет собой векторную сумму касательной \vec{a}_C^τ и нормальной \vec{a}_C^n составляющей. Его модуль можно определить по таким формулам, как:

$$a_C = \sqrt{a_C^{\tau 2} + a_C^{n 2}}, \text{ или } a_C = |AC| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \Rightarrow$$

$$a_C = \sqrt{3,12^2 + 1,56^4} \approx 7,91\text{ м/с}^2.$$

Расположение данного вектора также можно оценить нахождением величины острого угла μ между ним и вектором нормального ускорения по формуле:

$$\sphericalangle \mu = \arctg\left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\right).$$

$$\text{В нашем случае: } \sphericalangle \mu = \arctg\left(\frac{|3,12|}{1,56^2}\right) \Rightarrow \sphericalangle \mu \approx 52^\circ.$$

В случае $\varepsilon > 0$ вектор полного ускорения откладывается от нормали к траектории в сторону направления угловой скорости и наоборот (в любом случае в сторону направления углового ускорения). Очевидно, что кинематические параметры точки E тождественны с точкой C .

Направление векторов кинематических характеристик точки E определяется параллельным переносом аналогичных характеристик точки C .

Данные расчётов представим в виде рис. 1.51.

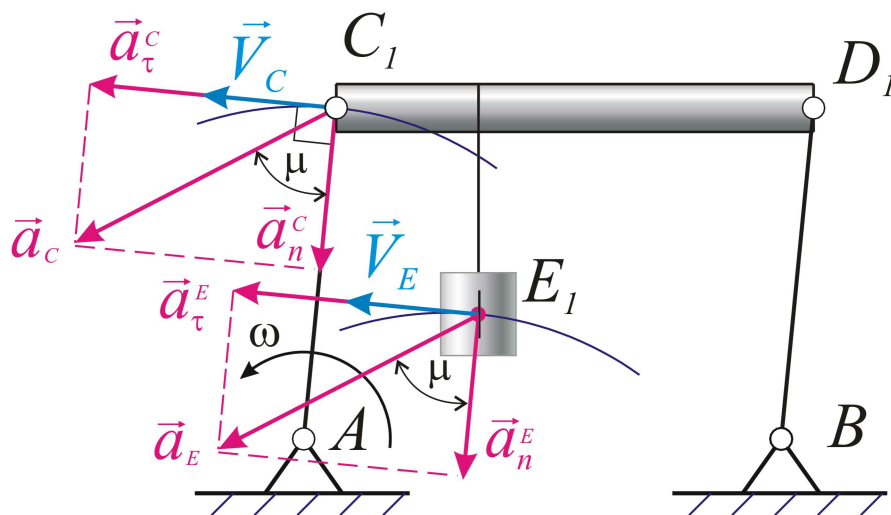


Рис. 1.51. К результатам решения примера 1.11

Пример 1.12. Ротор электродвигателя радиусом $r=80$ мм вращается с постоянной частотой вращения 1460 об/мин. Определить модуль вектора линейной (окружной) скорости, а также модуль и направление вектора ускорения точки M , лежащей на поверхности ротора.

Решение:

Зная частоту вращения ротора n , можно определить его угловую скорость по формуле:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \Rightarrow \omega = \frac{\pi \cdot 1460}{30} \approx 152,9 \text{ с}^{-1}.$$

Линейная или окружная скорость точки M , лежащей на его поверхности, определяется по формуле:

$$V = \omega \cdot r \Rightarrow V = 152,9 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \approx 12,23 \text{ м/с}.$$

Несмотря на то, что ротор совершает равномерное вращательное движение, ускорение точки M , лежащей на его поверхности, нулю равно не будет. При равномерном вращении вектор полного ускорения точки M будет тождественен вектору нормального (центростремительного) ускорения и направлен от точки M по радиусу r к оси вращения. Модуль ускорения точки M можно определить по формуле:

$$a_M = a_M^u = \omega^2 \cdot r = 152,9^2 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \approx 1870 \text{ м/с}^2.$$

1.2.5. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (плоским) движением тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Рассмотрим сечение S какого-либо тела, параллельное неподвижной плоскости (рис. 1.52). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM' , перпендикулярной сечению S , движутся в плоскости тождественно.

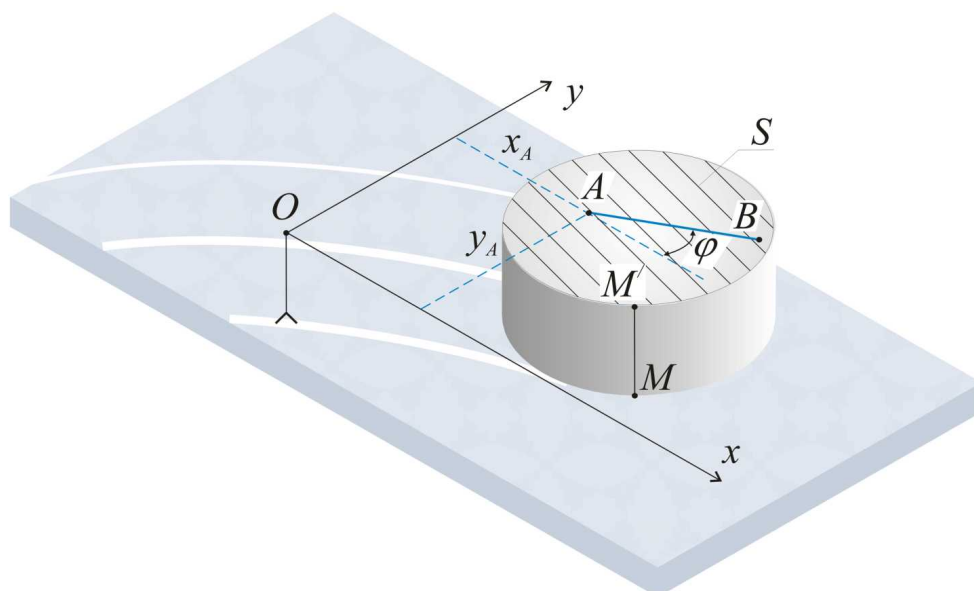


Рис. 1.52. Плоскопараллельное движение

Отсюда делаем вывод о том, что для изучения плоскопараллельного движения твердого тела (см. рис. 1.52) достаточно знать, как в плоскости Oxy , параллельной исходной неподвижной плоскости, движется произвольная плоская фигура S . Рассмотрим плоскопараллельное движение подробнее. Положение фигуры в плоскости Oxy определяется положением произвольного отрезка AB . В свою очередь, положение отрезка AB определяется с помощью координат x_A, y_A точки A и угла φ , который отрезок AB образует с осью x .

Точку A , выбранную в качестве исходной для определения положения отрезка, назовем *полюсом*.

При движении плоской фигуры параметры x_A, y_A и φ будут, таким образом, меняться по законам:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (1.72)$$

Данные зависимости называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*. Первые два отражают общее поступательное движение, при котором все точки движутся так, как и полюс A . Третье уравнение будет определять вращательное движение данной плоской фигуры относительно полюса A . Таким образом, можно сделать следующий вывод:

В общем случае движение плоской фигуры в плоскости складывается из поступательного движения, при котором все точки движутся так, как и полюс, и вращательного движения данной фигуры вокруг этого полюса.

При изучении плоского движения в качестве полюса может быть выбрана любая точка фигуры. Характеристики поступательной части при этом будут меняться, так как в общем случае $\vec{V}_C \neq \vec{V}_A$ и $\vec{a}_C \neq \vec{a}_A$ (иначе движение было бы простым поступательным), а вот характеристики вращательной части ω, ε остаются неизменными. Отсюда вывод: вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

1.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. ТЕОРЕМА СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ТЕЛУ, СОВЕРШАЮЩЕМУ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Скорость любой точки B плоской фигуры (рис. 1.53) геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (1.73)$$

Здесь \vec{V}_{BA} - скорость, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг полюса A . Надо полагать, что $V_{BA} = \omega \cdot |BA|$ и $\vec{V}_{BA} \perp BA$. Модуль и направление \vec{V}_B находятся построением соответствующего параллелограмма.

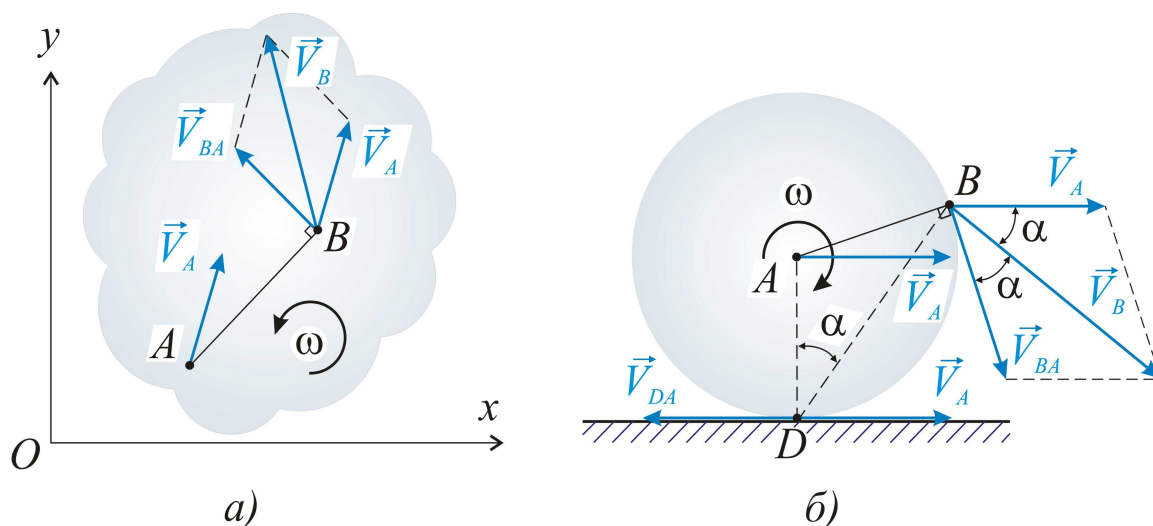


Рис. 1.53. Графическая интерпретация теоремы скоростей при плоскопараллельном движении

1.2.7. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой называется *сферическим*.

Рассмотрим, какими параметрами определяется такое движение. Возьмем неподвижную систему отсчёта $Ox_1y_1z_1$ таким образом, чтобы начало координат точка O совпало с неподвижной точкой твердого тела. Свяжем с телом трехгранник $Oxyz$, по положению которого можно судить о положении твердого тела, рис. 1.54.

Линия OK , лежащая в плоскости x_1Oy_1 , вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1 , называется *линией узлов*.

Положение подвижного трехгранника $Oxyz$ по отношению к неподвижным осям можно определить при помощи углов:

$$\varphi = \sphericalangle KOx; \quad \psi = \sphericalangle x_1OK; \quad \theta = \sphericalangle z_1Oz.$$

Эти углы называются *углами Эйлера*, имеют свои названия:

Угол φ (фи), лежащий в плоскости Oxy , перпендикулярной оси z , называется *углом собственного вращения*.

Угол ψ (пси), лежащий в плоскости x_1Oy_1 , перпендикулярной оси z_1 , называется *углом прецессии*.

Угол θ (тета), лежащий в плоскости yOz , перпендикулярной линии узлов OK , которая в свою очередь перпендикулярна осям z_1 и z , называется *углом нутации*.

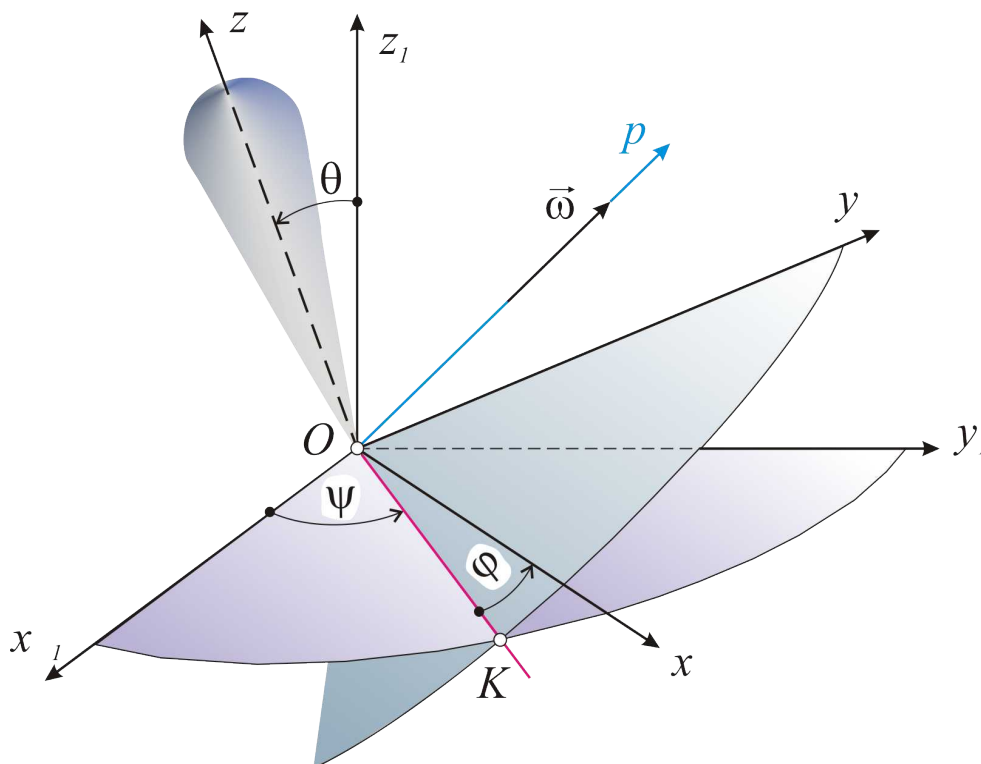


Рис. 1.54. Сферическое движение

Эйлеровы углы φ , ψ , θ считаются положительными в случае, если смотря с положительных направлений осей z , z_1 , OK , перпендикулярных плоскостям соответствующих углов, можно видеть эти углы отложенными от осей OK , x_1 , z_1 в направлении против часовой стрелки.

Таким образом, для определения движения твердого тела с одной неподвижной точкой необходимо знать, как меняются эйлеровы углы по времени, т.е.:

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t); \quad \theta = f_3(t). \quad (1.74)$$

Эти зависимости, однозначно определяющие сферическое движение, называются *уравнениями сферического движения твердого тела*.

При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (*собственное вращение*) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла

ψ - вращение вокруг оси Oz_1 - (*прецессия*) с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\psi}$ и при изменении угла θ - вращение вокруг линии узлов OK (*нутация*) с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$. Векторы $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ этих угловых скоростей направлены по осям Oz, Oz_1 и OK соответственно.

Таким образом, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равной геометрической сумме соответствующих угловых скоростей, т.е.:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3. \quad (1.75)$$

С течением времени величина и направление вектора $\vec{\omega}$ меняются, поэтому его называют *мгновенной угловой скоростью тела*.

Ось Op , вдоль которой направлен вектор мгновенной угловой скорости, называется *мгновенной осью вращения*.

Угловым ускорением (мгновенным угловым ускорением) называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени величины и направления вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.76)$$

Система уравнений, определяющих проекции вектора мгновенной угловой скорости на подвижные оси $Oxyz$, называется *кинематическими уравнениями Эйлера*.

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

Проекции вектора мгновенной угловой скорости тела на неподвижные оси $Ox_1 y_1 z_1$ можно определить по уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

Используя последние уравнения, можно определить значения мгновенного углового ускорения тела, через его проекции на неподвижные оси $Ox_1 y_1 z_1$:

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1}; \quad \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1}; \quad \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1}. \quad (1.79)$$

1.2.8. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим самый общий случай движения твёрдого тела, когда оно может перемещаться в каком угодно направлении. Выберем произвольную точку A этого тела в качестве полюса и проведем через неё систему осей $Ax yz$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом относительно стационарных осей $Ox_1 y_1 z_1$ поступательно (рис. 1.55).

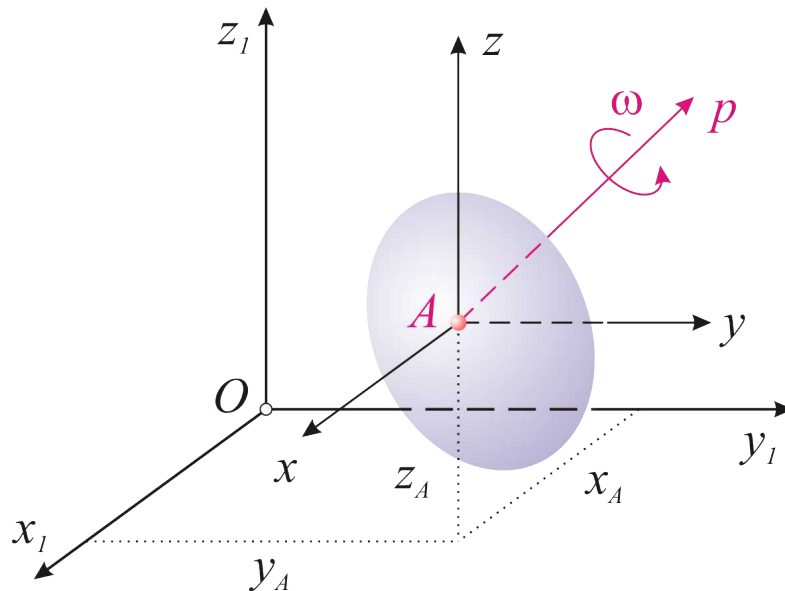


Рис. 1.55. К рассмотрению общего случая движения твёрдого тела

Таким образом, положение твёрдого тела в системе отсчёта $Ox_1 y_1 z_1$ будет определяться координатами полюса A и углами Эйлера твёрдого тела в нестационарной системе осей $Ax yz$.

Следовательно, уравнения для общего случая движения свободного твёрдого тела могут быть представлены как

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t); & \varphi &= f_4(t); \\ y_A &= f_2(t); & \psi &= f_5(t); \\ z_A &= f_3(t); & \theta &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Первые три уравнения (левый столбец) определяют движение твёрдого тела при постоянных углах Эйлера (отсутствии вращения относительно полюса A).

Последние три уравнения (правый столбец) определяют движение твёрдого тела в том случае, если бы полюс A был неподвижной точкой.

Общий случай движения свободного тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения твёрдого тела, при котором все его точки движутся, как и произвольный полюс A , и сферического движения твёрдого тела относительно данного полюса A .

Заметим, что сферическое движение характеризуется положением

мгновенной оси вращения $A\rho$, вдоль которой направлен **вектор мгновенной угловой скорости твердого** тела $\vec{\omega}$, являющийся векторной суммой угловых скоростей в собственном вращении, прецессии и нутации. Поэтому геометрическую картину общего движения твердого тела можно изобразить, согласно рис. 1.56.

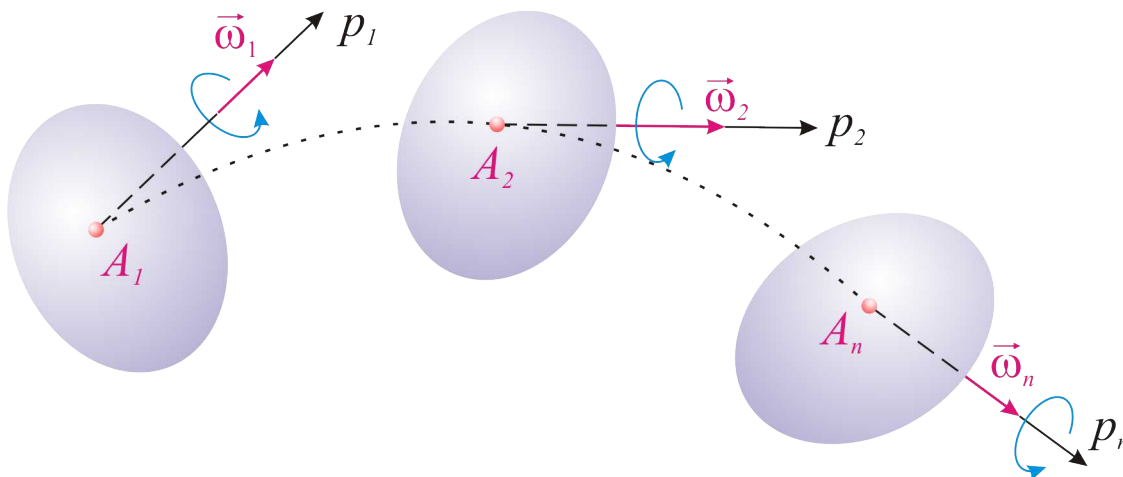


Рис. 1.56. Картина общего случая движения твердого тела

Учтем, что при общем случае движения твердого тела, так же как и при его плоском движении, вращательная составляющая этого движения от выбора полюса не зависит. При перемене полюса будет меняться только поступательная его часть.

Определяющими кинематическими характеристиками для общего случая движения являются вектор скорости и ускорения полюса, а также векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении твердого тела вокруг этого полюса.

Для определения вектора скорости и вектора ускорения любой точки твердого тела, совершающего произвольное перемещение, используют векторные равенства, которые аналогичны применяемым для плоскопараллельного движения.

1.2.9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета (неподвижной системы декартовых координат или подвижной системы естественных осей).

Такой вид движения является **простым**. Если рассматривается движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижна (стационарна), а вторая движется, то такое движение считается **сложным**.

Рассмотрим точку M , движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, которая в свою очередь движется относительно

другой условно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ (рис.1.57).

1. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Ox_1y_1z_1$ и всеми связанными с нею точками (включая точку m , неизменно связанную с точкой M) по отношению к неподвижной системе отсчета, является для точки M *переносным*.

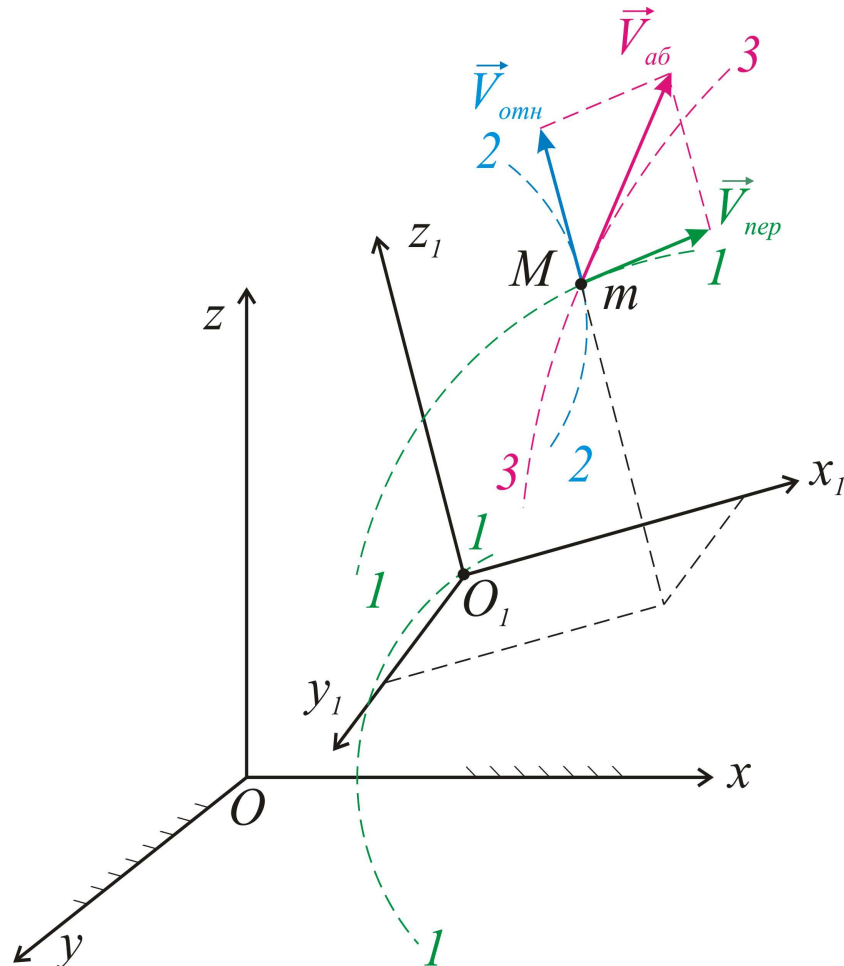


Рис. 1.57. Сложное движение точки

Траектория $1-1$ - будет являться траекторией переносного движения. Скорость той неизменно связанной с подвижными осями точки m , с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M , называется переносной скоростью точки M и обозначается \vec{V}_{nep} или \vec{V}_e (от французского *entraîner* - увлекать), а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M и обозначается \vec{a}_{nep} или \vec{a}_e .

2. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Ox_1y_1z_1$), называется *относительным*. Траектория $2-2$ будет называться относительной траекторией.

Скорость точки M по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ называется относительной скоростью \vec{V}_{om} или \vec{V}_r (от латинского *relativus* - относительный), а ускорение - относительным ускорением \vec{a}_{om} или \vec{a}_r .

При определении данных величин движение самих осей $Ox_1y_1z_1$ во

внимание не принимается (они считаются неподвижными).

3. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$, называется *абсолютным* или *сложным*.

Траектория **3-3** - называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью \vec{V}_{abc} или \vec{V} , а ускорение - абсолютным ускорением \vec{a}_{abc} или \vec{a} .

1.2.10. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

При сложной движении абсолютная (полная) скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей (рис.1.58):

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}. \quad (1.81)$$

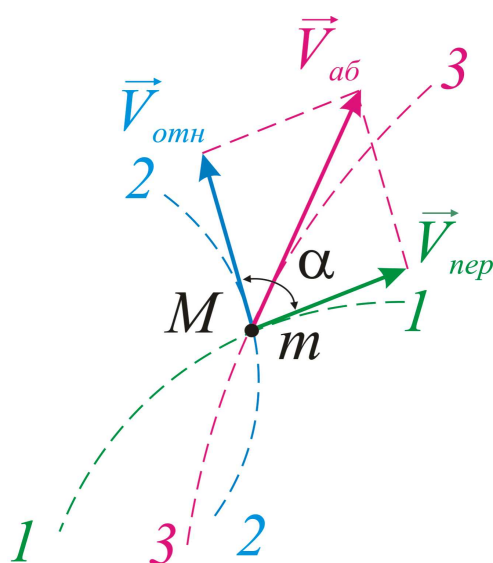


Рис. 1.58. К теореме скоростей при сложном движении

Данные векторы направлены по касательным к соответствующим траекториям. Если угол между векторами $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ равен α , то модуль абсолютной скорости можно определить по формуле:

$$V_{abc} = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{пер}^2 + 2 V_{отн} \cdot V_{пер} \cos \alpha}. \quad (1.82)$$

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА

Динамика - это раздел теоретической механики, в котором изучается движение твердых тел под действием сил. Данный раздел можно условно разбить на подразделы: динамику материальной точки и динамику твердых тел (механических систем).

Традиционно изучение динамики начинают с подраздела динамики материальной точки.

1.3.1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.3.1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Первый закон динамики (закон инерции).

Изолированная от внешнего воздействия материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят её изменить данное состояние.

Второй закон динамики (основной закон динамики).

Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением действия рассматриваемой силы.

Математически основной закон динамики можно представить в виде векторного равенства:

$$m \vec{a} = \vec{F}. \quad (1.83)$$

Третий закон динамики (закон равенства действия и противодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

1.3.1.2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

В данном подразделе обычно классифицируют задачи на два вида:

Прямая задача

В рамках данной задачи по известному закону движения определяют силу, действующую на материальную точку.

Как правило, её решение связано с дифференцированием соответствующих уравнений движения.

При способе задания движения точки в декартовых прямоугольных координатах рассматривается группа уравнений вида:

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_{kx} \\ ma_y = \sum F_{ky} \\ ma_z = \sum F_{kz} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky} \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \end{cases}. \quad (1.84)$$

В левых частях каждого из рассматриваемых уравнений интерпретируется второй закон Ньютона (основной закон динамики), согласно которому $F = m \cdot a$, в отношении составляющей (проекции) равнодействующей силы,

взятой относительно одной из осей x, y, z .

В правых частях уравнений представлены составляющие (проекции) вектора равнодействующей сил, взятые по соответствующим осям.

Очевидно, что составляющая равнодействующей F_i (её проекция на ось i), согласно положениям статики, равна арифметической сумме проекций на ту же ось сил $\sum F_{ki}$, действующих на данную материальную точку (рис. 1.59).

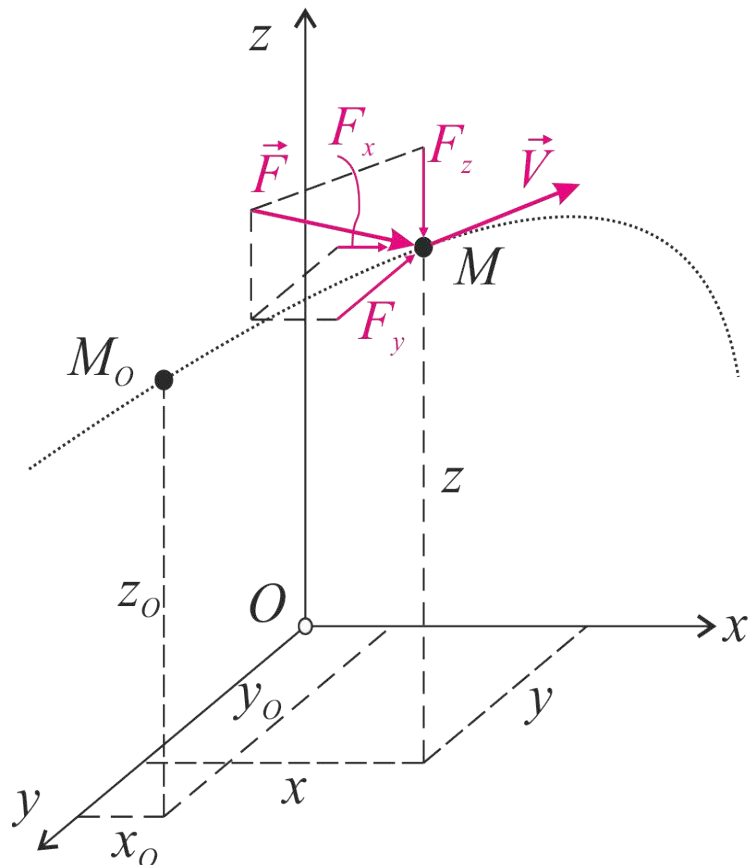


Рис. 1.59. Движение материальной точки M под действием силы (равнодействующей) \vec{F} , рассматриваемое в системе декартовых осей x, y, z

Величина и направление равнодействующей \vec{F} всех сил, приложенных к точке, определяется следующим образом.

Величина:

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} \Rightarrow F = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}. \quad (1.85)$$

Направление:

$$\cos \alpha = \frac{\sum F_{kx}}{F}, \quad \cos \beta = \frac{\sum F_{ky}}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{\sum F_{kz}}{F}. \quad (1.86)$$

В данных формулах направление вектора равнодействующей \vec{F}

определяется с помощью направляющих косинусов, где α, β, γ - углы наклона вектора \vec{F} к осям x, y, z соответственно.

Если используются оси естественного трехгранника (касательная τ , нормаль n , бинормаль b , рис. 1.60), рассматривается следующая группа уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} ma_\tau &= \sum F_{k\tau} \\ ma_n &= \sum F_{kn} \\ ma_b &= \sum F_{kb} \end{aligned} \right\}, \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= \sum F_{k\tau} \\ m \frac{V^2}{\rho} &= \sum F_{kn} \\ 0 &= \sum F_{kb} \end{aligned} \right\}. \quad (1.87)$$

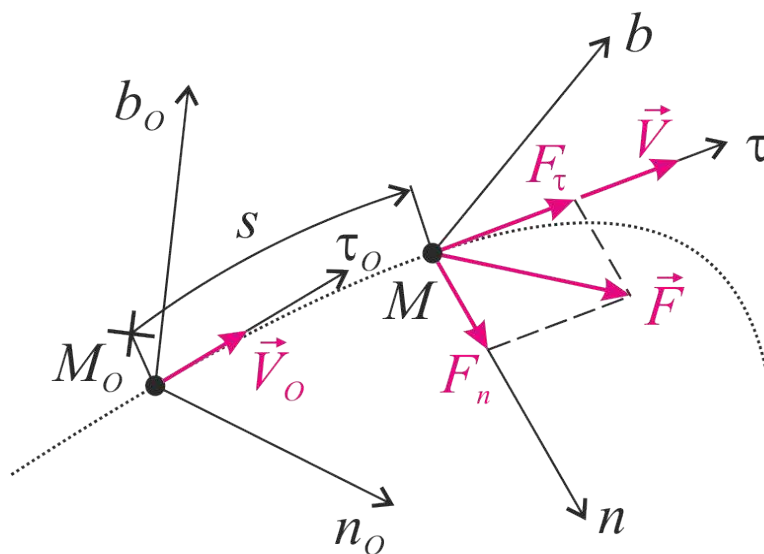


Рис. 1.60. Движение материальной точки M под действием силы (равнодействующей) \vec{F} , рассматриваемое в системе естественных осей τ, n, b

Обратная задача

В рамках данной задачи определяется закон движения материальной точки по действующим на неё силам. Решение этой задачи сопряжено с необходимостью интегрировать дифференциальные уравнения движения. После интегрирования уравнений движения появляющиеся постоянные определяются путем рассмотрения начальных условий. Под начальными условиями здесь следует понимать значение положения x_0, y_0, z_0 и скорости V_{0x}, V_{0y}, V_{0z} материальной точки в начальный момент времени $t=0$ с.

Пример 1.13. Движение материальной точки массой $m=2$ кг определяется радиусом-вектором $\vec{r}=0,2t^3\vec{i}-6\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\vec{j}+1,5t^2\vec{k}$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке в момент времени $t=1$ с, а также её угол наклона к оси Ox .

Решение. Данная задача является прямой задачей динамики точки.

Вначале определяется полное ускорение точки как геометрическая сумма проекций её ускорений на декартовы оси. Потом используем второй (основной) закон динамики, согласно которому сила, действующая на точку, определяется как произведение её массы на модуль её ускорения в рассматриваемый момент времени.

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = (0,2t^3)'' = 1,2t.$$

В момент времени $t = 1 \text{ с}$ $a_x = 1,2 \cdot 1 = 1,2 \text{ м/с}^2$.

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(-6 \sin \left(\frac{\pi \cdot t}{6} \right) \right)'' = \frac{\pi^2}{6} \sin \left(\frac{\pi \cdot t}{6} \right).$$

В момент времени $t = 1 \text{ с}$ $a_y = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot 1}{6} \right) \approx 0,82 \text{ м/с}^2$.

$$a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = (1,5t^2)'' = \text{const} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1,2^2 + 0,82^2 + 2^2} \Rightarrow a \approx 2,47 \text{ м/с}^2$.

Модуль равнодействующей $R = m \cdot a \Rightarrow R = 2 \cdot 2,47 = 4,94 \text{ Н}$.

Согласно второму закону, материальная точка получает направление ускорения в направлении действия силы, приложенной к ней, поэтому для определения угла наклона вектора силы к оси Ox достаточно определить угол наклона вектора ускорения $\sphericalangle \alpha_1$ к этой оси.

$$\sphericalangle \alpha_1 = \arccos \left(\frac{a_x}{a} \right) = \arccos \left(\frac{1,2}{2,47} \right) \Rightarrow \sphericalangle \alpha_1 \approx 60,9^\circ.$$

Ответ: $R = 4,94 \text{ Н}$, $\sphericalangle \alpha_1 \approx 60,9^\circ$.

Пример 1.14. Брусок массой $m = 4 \text{ кг}$, находящийся на шероховатой наклонной поверхности с углом наклона 30° , из состояния покоя начинает движение под действием силы собственного веса и приложенной силы $F = 5 \text{ Н}$, рис.1.61.

Определить путь s и скорость V данного бруска спустя 3 сек после начала движения, если коэффициент трения скольжения между бруском и поверхностью составляет $f = 0,2$. Брусок считать материальной точкой.

Решение. Данная задача представляет собой обратную задачу динамики точки. Примем систему координат xOy , рис. 1.62.

Брус совершает прямолинейное поступательное движение только вдоль оси Ox . Поэтому для определения параметров его движения достаточно использовать одно дифференциальное уравнение движения относительно этой

оси: $m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}$.

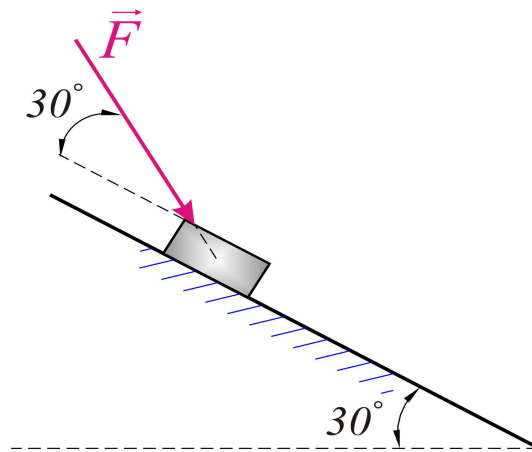


Рис. 1.61. К условию примера 1.14

Приложим силы, действующие на груз, см. рис. 1.62, и рассмотрим уравнение движения в отношении нашей текущей задачи.

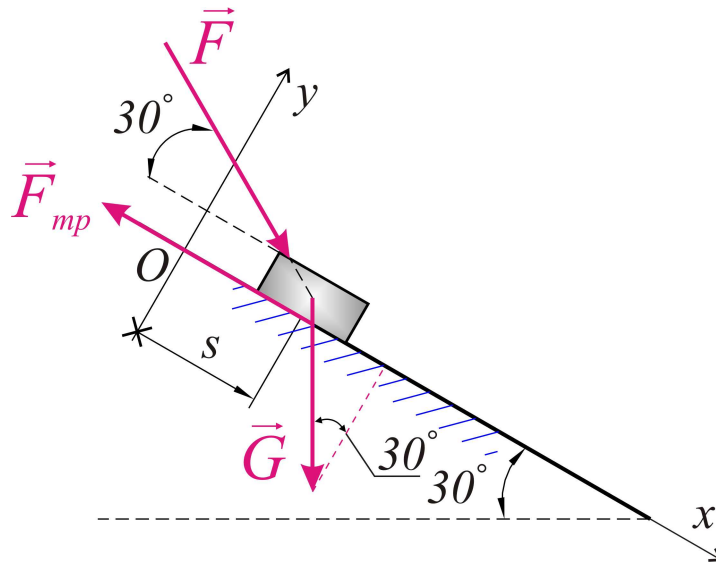


Рис. 1.62. К решению примера 1.14

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \Rightarrow$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \cdot \cos 30^\circ + G \cdot \sin 30^\circ - F_{mp} \Rightarrow$$

Разделим обе части уравнения на $m = 4 \text{ кг}$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 1,25 \cdot \cos 30^\circ + g \cdot \sin 30^\circ - g \cdot f \cdot \cos 30^\circ. \quad \text{Упростим уравнение:}$$

$$a = a_x = \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 5,81.$$

Дважды проинтегрируем данное уравнение:

$$V = V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 5,81t + C_1; \quad (*)$$

$$s = x = 5,81 \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2. \quad (**)$$

Для определения неизвестных постоянных в (*) и (**) используем граничные условия, согласно которым при $t=0$ $V=\dot{x}=0$ и $x=0$.

Подставляя граничные условия в уравнение (*), получим:

$$0 = 5,81 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Подставляя граничные условия в уравнение (**), получим:

$$0 = 5,81 \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким образом, с учетом определённых постоянных интегрирования уравнения (*) и (**) примут вид:

$$V = V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 5,81t; \quad (***)$$

$$s = x = 5,81 \frac{t^2}{2}. \quad (***)$$

Подставляя в (***) значение времени $t=3c$, определим требуемую скорость. Подставляя в (****) значение времени $t=3c$, определим искомое перемещение. Таким образом:

$$V = 5,81 \cdot 3 = 17,43 \text{ м/с}.$$

$$s = 5,81 \frac{3^2}{2} = 26,15 \text{ м}.$$

Ответ: $V = 17,43 \text{ м/с}$; $s = 26,15 \text{ м}$.

1.3.1.3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Общие теоремы динамики устанавливают зависимости между динамическими характеристиками движения и дают возможность исследовать движение как твердых тел, так и механических систем, состоящих из материальных точек. Применение теорем динамики позволяет решать многие задачи без применения трудоемкой процедуры интегрирования.

1.3.1.4. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ИМПУЛЬС СИЛЫ

О количестве движения, как о характеристике движущихся тел, впервые упоминается в работах Галилео Галилея.

Позднее количество движения в качестве динамической характеристики было введено Рене Декартом (XVII в).

Согласно определению, *количеством движения материальной точки* называется векторная величина \vec{Q} , равная произведению массы точки на её скорость, т.е.:

$$\vec{Q} = m \vec{V}. \quad (1.88)$$

Количество движения в системе СИ измеряется - $[H \cdot c]$, или $\left[\frac{кг \cdot м}{с} \right]$.

Вектор \vec{Q} направлен так же, как вектор скорости \vec{V} , по касательной к траектории в сторону движения материальной точки (рис. 1.63).

Наряду с количеством движения, в динамике используют понятие *импульса силы*.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению силы \vec{F} на элементарный промежуток времени dt :

$$d\vec{S} = \vec{F} dt. \quad (1.89)$$

В случае, если вектор силы не изменяется: $\vec{F} = const$, импульс силы равен произведению модуля силы на время её действия.

Если сила с течением времени меняется, то *импульс силы за конечный промежуток времени* t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1 :

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt. \quad (1.90)$$

Являясь векторной величиной, импульс силы может быть вычислен по своим проекциям на координатные оси:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^{t_1} F_x dt; \\ S_y &= \int_0^{t_1} F_y dt; \\ S_z &= \int_0^{t_1} F_z dt. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Модуль вектора импульса в таком случае:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \quad (1.92)$$

Импульс силы, также как и количество движения, имеет единицу измерения $[H \cdot c]$, или $[кг \cdot м \cdot с^{-1}]$.

Направлен вектор импульса силы по линии действия силы в ту же сторону (см. рис. 1.63).

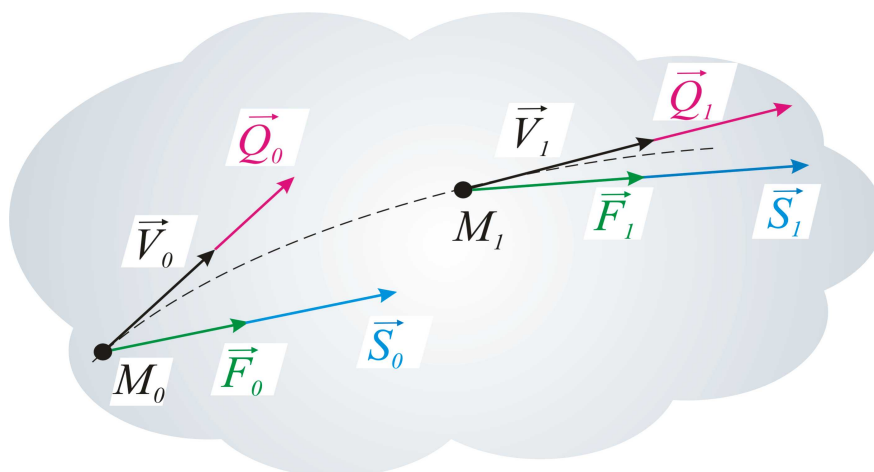


Рис. 1.63. Движение материальной точки M под действием переменной силы \vec{F} : взаиморасположение вектора силы \vec{F} , импульса этой силы \vec{S} , количества движения \vec{Q} и вектора скорости \vec{V}

Наличие одинаковых единиц измерения говорит о том, что количество движения материальной точки и импульс сил, действующих на неё, взаимосвязаны. Данная взаимосвязь представляет собой теорему об изменении количества движения.

Пример 1.15

Шкив 1 радиуса $R=1,2\text{ м}$, вращаясь с угловой скоростью $\omega=0,5\text{ с}^{-1}$, поднимает груз 2 массой $m=20\text{ кг}$, рис. 1.64.

Определить модуль количества движения груза, считая его материальной точкой.

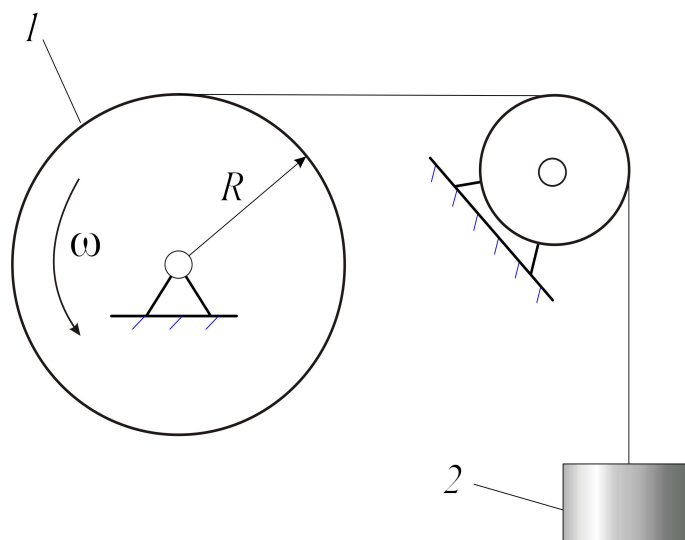


Рис. 1.64. К условию примера 1.15

Решение: Данная задача сводится к определению скорости груза с последующим использованием определения количества движения материальной точки. Определим линейную скорость точки, лежащей на поверхности шкива 1, совершающего вращательное движение:

$$V = \omega \cdot R = 0,5 \cdot 1,2 = 0,6 \text{ м/с}.$$

Считая линейную скорость в любых точках гибкой связи одинаковой, делаем вывод о том, что скорость груза будет иметь такое же значение. Далее, используем понятие количества движения материальной точки:

$$|Q| = m \cdot V = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $Q = 12 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

Пример 1.16. Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F = 1 + 18t^2$. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, где $t_2 = 3 \text{ с}$, $t_1 = 0$.

Решение: Так как модуль импульса по условию задачи меняется с течением времени, поэтому для решения нельзя использовать простую линейную зависимость. В таком случае импульс за конечный промежуток времени определяется интегральным выражением:

$$|\vec{S}| = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_0^3 (1 + 18t^2) dt = \left(t + 6t^3 \right) \Big|_0^3 = 3 + 6 \cdot 3^3 = 165 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $S = 165 [\text{Н} \cdot \text{с}]$.

1.3.1.5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Теорема об изменении количества движения материальной точки в векторном виде представляет собой следующее выражение:

$$m \vec{V}_1 - m \vec{V}_0 = \sum \vec{S}_k. \quad (1.93)$$

Т.е.: *Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за этот же промежуток времени.*

Теорему об изменении количества движения материальной точки можно использовать в виде уравнений проекций векторных величин на соответствующие координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} m V_{1x} - m V_{0x} &= \sum S_{kx}; \\ m V_{1y} - m V_{0y} &= \sum S_{ky}; \\ m V_{1z} - m V_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

Полный импульс сил, действующих на материальную точку, в таком случае можно представить как

$$\sum S_k = \sqrt{\left(\sum S_{kx} \right)^2 + \left(\sum S_{ky} \right)^2 + \left(\sum S_{kz} \right)^2}. \quad (1.95)$$

Пример 1.17. Материальная точка M массой 2 кг равномерно движется по траектории, представляющей собой окружность, со скоростью $V=3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на точку, за время её движения из положения 1 в положение 2, рис. 1.65.

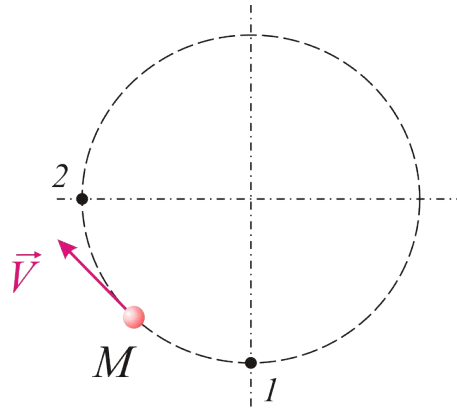


Рис.1.65. К условию примера 1.17

Решение: Примем систему координат xOy и изобразим вектор скорости для точки M , находящейся в начальном \vec{V}_1 и конечном \vec{V}_2 положении, рис. 1.66.

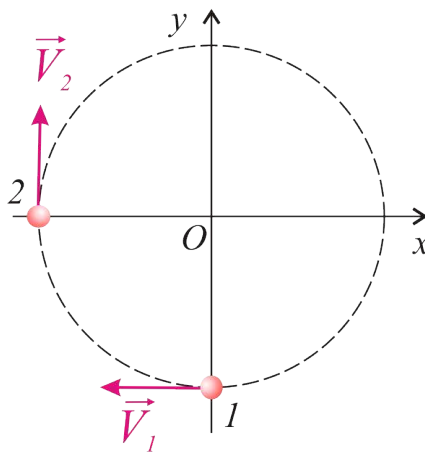


Рис.1.66. К решению примера 1.17

Наша точка движется в плоскости координатных осей xOy , поэтому можно воспользоваться теоремой об изменении количества движения материальной точки в уравнениях проекций сумм импульсов на оси Ox и Oy :

$$\left. \begin{aligned} mV_{2x} - mV_{1x} &= \sum S_{kx} \\ mV_{2y} - mV_{1y} &= \sum S_{ky} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) &= \sum S_{kx} \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 &= \sum S_{ky} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sum S_{kx} &= 6 \text{ Н} \cdot \text{с} \\ \sum S_{ky} &= 6 \text{ Н} \cdot \text{с} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\sum S_k = \sqrt{(\sum S_{kx})^2 + (\sum S_{ky})^2} = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} \Rightarrow \sum S_k \approx 8,5 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: $\sum S_k \approx 8,5 \text{ Н} \cdot \text{с}.$

1.3.1.7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Помимо количества движения, как его меры, движущуюся материальную точку можно оценить при помощи кинетической энергии.

Кинетической энергией материальной точки называют меру её механического движения, выражающуюся в половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Т.е. кинетической энергией материальной точки будет являться скалярная величина T :

$$T = \frac{mV^2}{2}, \text{ [Дж]}. \quad (1.96)$$

Пример 1.18. Тело 1 движется прямолинейно вертикально вверх, рис. 1.67, со скоростью $V_1 = 2 \text{ м/с}$. К стержню 2 длиной $OA = 0,4 \text{ м}$, который вращается вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 20 \text{ рад/с}$, прикреплен точечный груз A массой $0,2 \text{ кг}$. Определить кинетическую энергию груза при $\varphi = 60^\circ$. Груз считать материальной точкой.

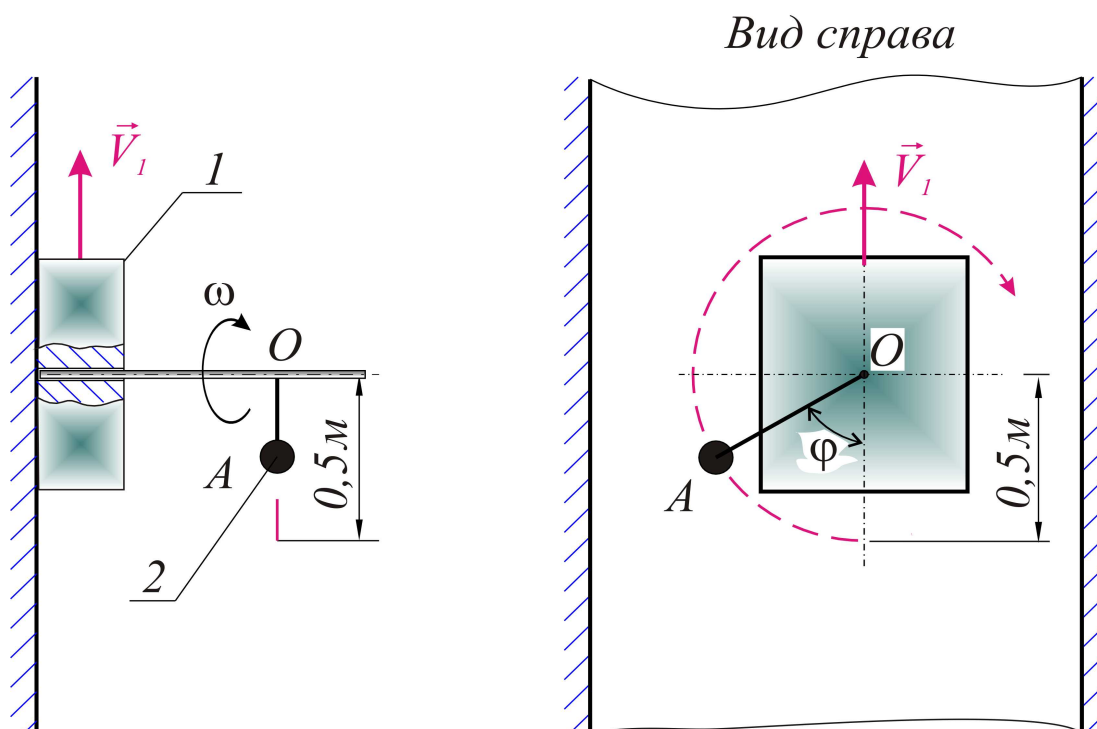


Рис. 1.67. К условию примера 1.18

Решение:

В данном случае груз совершает сложное движение.

Скорость груза в относительном вращательном движении:

$$V_{om} = \omega \cdot r = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_{om} \perp OA$ и направлен в сторону относительного вращательного движения, рис. 1.68.

Вектор скорости груза в переносном поступательном движении будет тождественен вектору скорости тела 1 , т.е. $V_{пер} = V_1 = 2 \text{ м/с}$.

Тогда абсолютная скорость груза $V = \sqrt{V_{ом}^2 + V_1^2 + 2V_{ом}V_1 \cos \alpha} \Rightarrow$
 $V = \sqrt{8^2 + 2^2 + 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ} \approx 9,78 \text{ м/с}$.

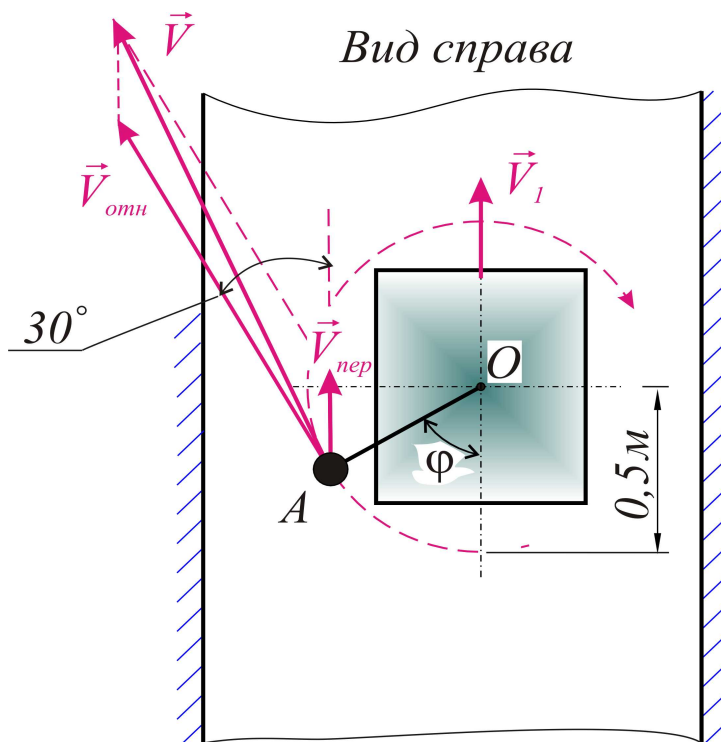


Рис. 1.68. К решению примера 1.18

Определив абсолютную скорость груза, согласно определению, его кинетическую энергию найдём:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 9,78^2}{2} \approx 9,57 \text{ Дж}.$$

Ответ: $T \approx 9,57 \text{ Дж}$.

1.3.1.8. РАБОТА СИЛЫ

Для характеристики действия, оказываемого силой на материальную точку (твёрдое тело) при её перемещении, вводят понятие *работы силы*.

Элементарной работой силы \vec{F} , приложенной к материальной точке M , называется скалярная величина, равная:

$$dA = F_\tau ds, \tag{1.97}$$

где F_τ - проекция силы \vec{F} на касательную к траектории движения точки M , направленную в сторону перемещения этой точки (рис. 1.69).

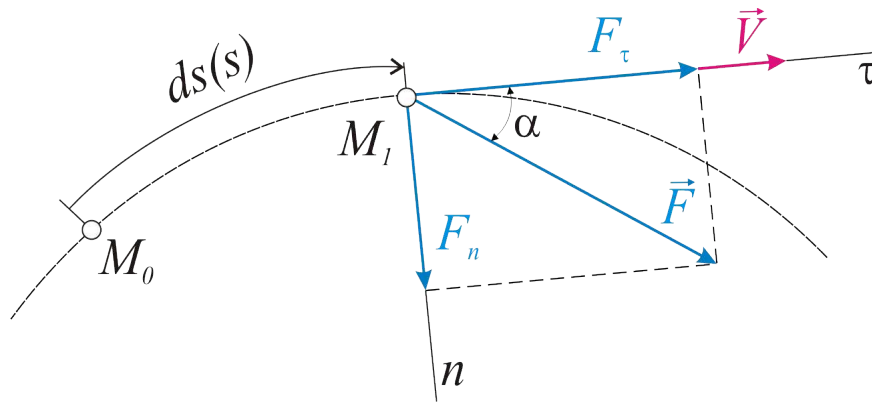


Рис. 1.69. К определению работы силы по перемещению материальной точки

Обратите внимание на то обстоятельство, что нормальная составляющая силы F_n не совершает работу по перемещению данной точки.

Так как проекция силы на касательную $F_\tau = F \cdot \cos \alpha$, можно представить элементарную работу в виде выражения:

$$dA = F \cdot \cos \alpha \, ds, \quad (1.98)$$

где α угол между вектором скорости этой точки (направлением её перемещения) и вектором силы \vec{F} , (см. рис. 1.89).

Знак работы, совершаемой силой по перемещению материальной точки, связан со знаком проекции этой силы.

Если проекция силы на направление перемещения положительна ($\alpha < 90^\circ$), то работа такой силы по перемещению данной точки тоже положительна.

В противном случае - при $\alpha > 90^\circ$ работа будет отрицательной.

В качестве примера силы, совершающей отрицательную работу при перемещении, можно привести силу сопротивления среды.

Заметим, что вектор равнодействующей этой силы всегда направлен в сторону, противоположную перемещению.

Если сила перпендикулярна совершаемому точкой перемещению ($\alpha = 90^\circ$), то она не совершает работу при данном перемещении.

Работа силы на каком-либо конечном перемещении M_0M_1 , заданном с использованием естественных осей, вычисляется согласно выражению:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \, ds. \quad (1.99)$$

При движении, заданном в системе декартовых осей, работу можно вычислить как

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz). \quad (1.100)$$

Если касательная составляющая вектора силы остается постоянной величиной (например, при прямолинейном движении, рис. 1.70), то:

$$A_{M_0M_1} = F_\tau \cdot s, \quad (1.101)$$

где $s = |M_0M_1|$.

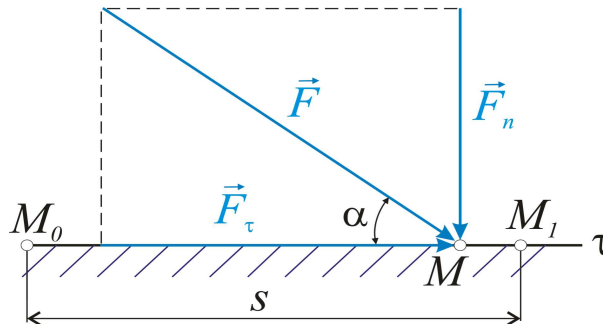


Рис. 1.70. К определению работы при прямолинейном перемещении

Работа в системе СИ измеряется в [Дж], или [Н·м], или [кг·м²·с⁻²]. При определении работы необходимо учитывать специфику силы, совершающей данную работу. Так, например, работу силы тяжести по перемещению материальной точки M из положения M_0 в положение M_1 (рис. 1.71), согласно определению, оценивают как

$$A_{M_0M_1} = \pm P \cdot h, \quad (1.102)$$

где $h = z_0 - z_1$.

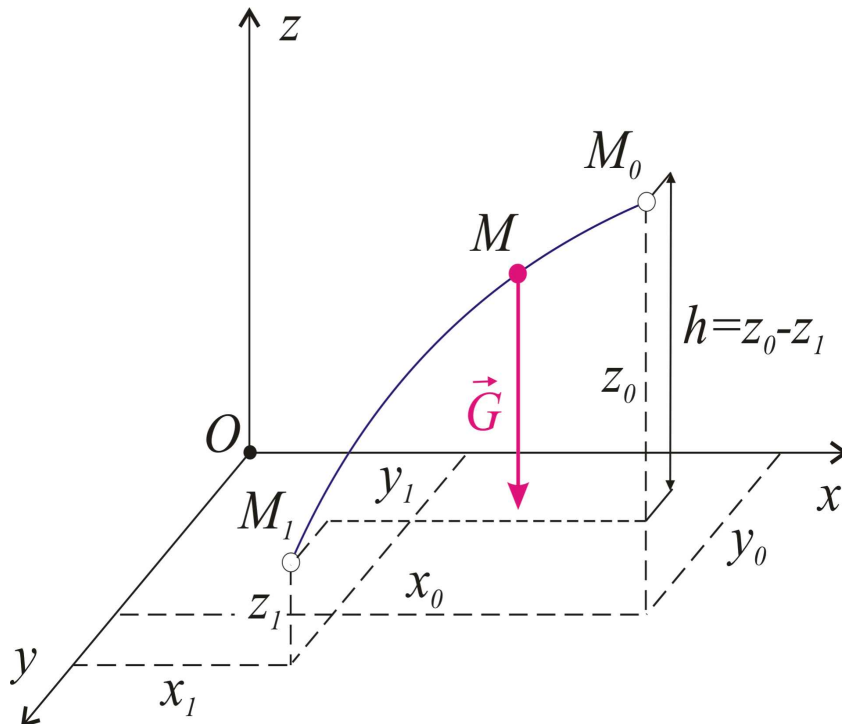


Рис. 1.71. К определению работы силы тяжести

Очевидно, что если материальная точка движется в направлении вниз, то работа силы тяжести \vec{G} при таком перемещении будет положительной, и наоборот, если материальная точка перемещается вверх, то работа силы тяжести будет отрицательной величиной. На рис. 1.71 изображён случай, когда работа силы тяжести \vec{G} положительна. Заметим то обстоятельство, что величина работы силы тяжести не зависит от траектории, по которой перемещается материальная точка. Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными силами*.

Другим примером работы потенциальных сил может служить работа силы упругости пружины, изображенной на рис. 1.72.

Рассматривая работу цилиндрической пружины в плоскости, на рисунке отметим положение 0 , соответствующее ненапряженной пружине. Первоначальная длина пружины - l_0 . При ненапряжённом состоянии величина силы упругости $\vec{F}_{упр}$ (положение 0) будет равна нулю.

При отклонении пружины от положения 0 за счёт приложения силы извне величина силы упругости принимает ненулевое значение и может быть оценена по формуле:

$$F_{упр} = c \cdot \lambda = c|x|; \quad F_x = -c \cdot x, \quad (1.103)$$

где c - коэффициент жесткости упругого элемента (пружины);
 λ - величина отклонения пружины от положения равновесия.

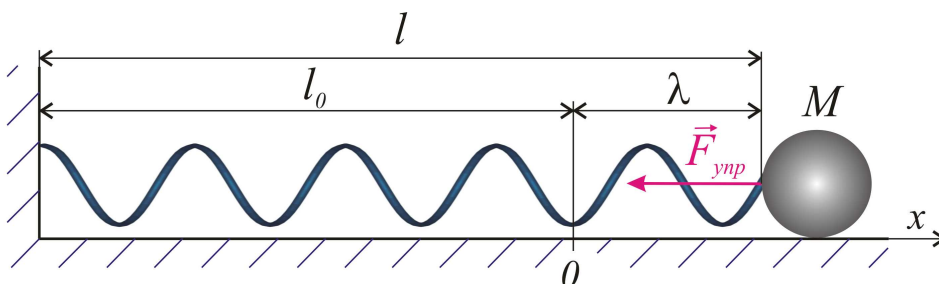


Рис. 1.72. К определению работы силы упругости

Величина же работы, совершаемой этой силой, будет оцениваться как

$$A_{M_0 M_1} = \frac{c}{2} \cdot (\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \quad (1.104)$$

где λ_0 - расстояние от точки M_0 в начальном положении до точки 0 , определяющей равновесное положение; λ_1 - расстояние от точки M_1 в конечном положении до точки 0 , определяющей равновесное положение.

Заметим, что работа силы упругости будет положительной, когда точка стремится к равновесному положению ($\lambda_0 > \lambda_1$), и отрицательной, когда она от него удаляется ($\lambda_0 < \lambda_1$). Рассмотрим способ определения работы силы трения при перемещении материальной точки M по шероховатой поверхности (рис. 1.73).

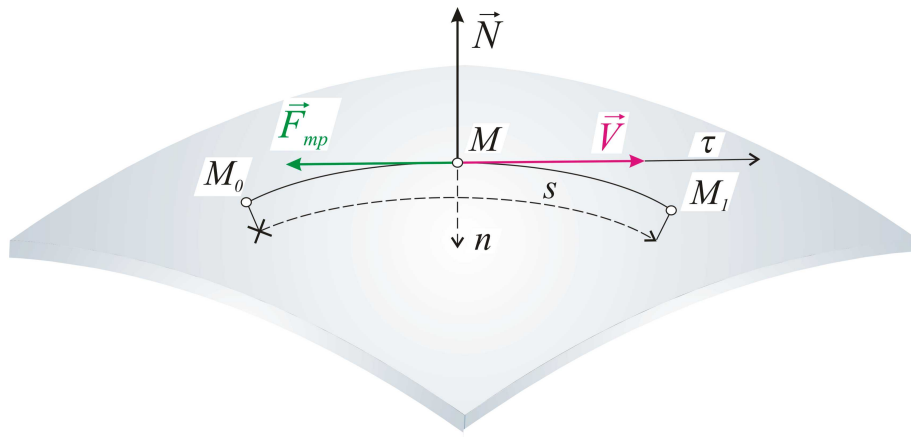


Рис. 1.73. К определению работы силы трения при перемещении точки по шероховатой поверхности

Действующая на точку сила трения \vec{F}_{mp} направлена противоположно перемещению точки (вектору \vec{V}). Если по величине сила трения постоянна, то её работа может быть выражена по формуле:

$$A_{M_0M_1} = -F_{mp} \cdot s, \quad (1.105)$$

где s - длина дуги, соответствующая длине дуги M_0M_1 , по которой перемещается точка.

Анализируя выражение 1.128, отмечаем, что при изменении формы траектории движения точки в общем случае меняется величина s , а соответственно, и величина работы. Поэтому сила трения \vec{F}_{mp} не является потенциальной силой.

Пример 1.19

На тело массой $m = 1 \text{ кг}$ (рис. 1.74), совершающее прямолинейное поступательное движение по горизонтальной шероховатой поверхности с $f = 0,2$, действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3 + 5$. Определить работу всех сил при перемещении этого тела из положения с координатой $x_0 = 0$ в положение $x_1 = 1 \text{ м}$. Тело считать материальной точкой.

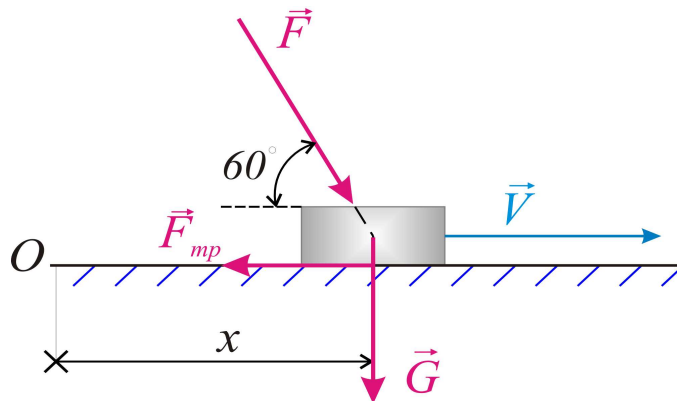


Рис. 1.74. К примеру 1.19

Решение:

Определим сумму проекций всех действующих сил на касательную к перемещению данного тела, которая будет равна проекции равнодействующей данной системы на эту ось, заметим, что работа силы тяжести на этом перемещении будет равна нулю, так как $\vec{G} \perp O\vec{x}$.

Следовательно:

$$R_{\tau} = \sum F_{\tau} = F \cdot \cos 60^{\circ} - F_{mp} = ((4x^3 + 5) \cos 60^{\circ} - mg \cdot f) \Rightarrow$$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} R_{\tau} dx = \int_0^1 ((4x^3 + 5) \cdot \cos 60^{\circ} - mg \cdot f) dx = (0,5x^4 + 0,54x) \Big|_0^1 \Rightarrow A = 1,04 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 1,04 \text{ Дж}$.

Пример 1.20

Ненагруженную пружину (рис. 1.75), коэффициент жесткости которой $c = 200 \text{ Н/м}$, растянули на 3 см .

Определить работу силы упругости пружины на таком перемещении.

Решение. Работа силы упругости пружины будет отрицательна, так как перемещение, совершаемое упругим элементом под действием внешней силы, направлено в сторону, противоположную силе упругости.

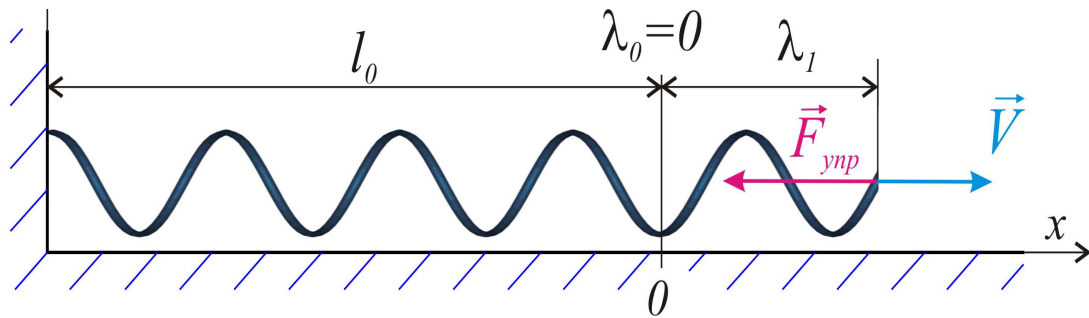


Рис. 1.75. К примеру 1.20

$$A = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = \frac{200}{2} (0^2 - 0,03^2) = -0,09 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = -0,09 \text{ Дж}$.

Пример 1.21

Материальная точка M , масса которой $m = 0,5 \text{ кг}$ (рис. 1.76), скользит вниз по дуге окружности радиуса $r = 0,5 \text{ м}$ с центральным углом $\alpha = 90^{\circ}$. Определить работу, совершенную силой тяжести при перемещении точки M из положения A в положение B .

Решение: Сила тяжести является потенциальной силой, поэтому её работа не зависит от траектории движения.

В нашем случае она положительна, так как направление перемещения совпадает с направлением действия силы тяжести и равна:

$$A = \pm mgh = +m \cdot g \cdot r = 0,2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \Rightarrow A = 0,98 \text{ Дж}.$$

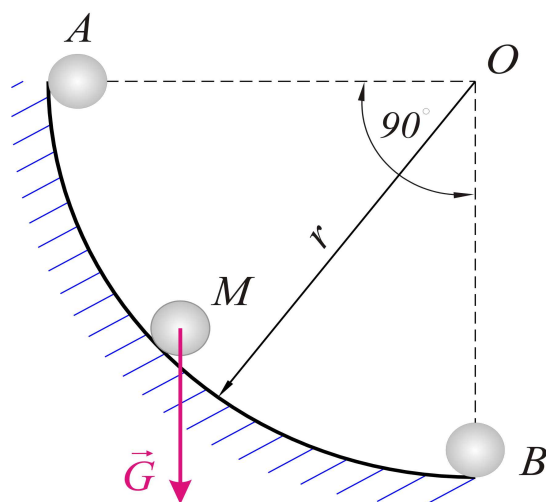


Рис. 1.76. К примеру 1.21

Ответ: $A=0,98 \text{ Дж}$.

1.3.1.9. МОЩНОСТЬ

Для оценки работы, совершаемой в единицу времени, применяется еще одна динамическая характеристика – *мощность*.

Под мощностью понимается величина N , определяющая работу, совершаемую силой, в единицу времени. В общем случае мощность определяется по формуле:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_{\tau} \cdot ds}{dt} = F_{\tau} \cdot V. \quad (1.106)$$

Если работа совершается равномерно, то мощность может быть оценена при помощи более простого выражения:

$$N = \frac{A}{t}. \quad (1.107)$$

Формула 1.106 имеет большой практический смысл, сущность которого состоит в том, что при относительном постоянстве мощности источника энергии (привода) величина крутящего момента (силы тяги), развиваемая им, будет обратно пропорциональна скорости (частоте вращения) рабочего органа. В частности, при эксплуатации автомобиля в условиях бездорожья при помощи механизмов (например, коробки передач) используют увеличенный крутящий момент, развиваемый двигателем на низших передачах при пониженной скорости. Единицей измерения мощности в системе СИ является $[\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1}]$, или $[\text{ватт}]$. внесистемной единицей измерения мощности, применяемой в технике, является лошадиная сила: $1 \text{ л.с.} \approx 736 \text{ Вт}$.

Работу, произведенную машиной в единицу времени, можно оценить в соответствии с формулами 1.106-1.107.

Кроме этого, при производстве электроэнергии и отпуске её потребителям в электроэнергетике широко применяется её внесистемная величина оценки - *киловатт-час*: $1 \text{ кВт} \cdot \text{час} = 10^3 \cdot 60^2 = 3,6 \cdot \text{МДж}$.

Пример 1.22

Барабан, радиусом $R=0,4 \text{ м}$ (рис. 1.77, а), вращаясь с постоянной скоростью $\omega=5 \text{ с}^{-1}$, поднимает груз массой $m=100 \text{ кг}$. Определить мощность, затрачиваемую на подъем груза. Массой барабана и блока, а также силами трения на них – пренебречь.

Решение:

Пользуясь принципом освобождения от связи, отбрасываем барабан, заменяя его действие на силу натяжения троса T (см. рис. 1.77, б). Проведем ось y в направлении движения груза (вертикально вверх). Учтём действие силы тяжести. Составим дифференциальное уравнение движения груза относительно этой оси.

$$m \frac{dV_y}{dt} = \sum F_i \Rightarrow \text{или } m \frac{dV_y}{dt} = T - G.$$

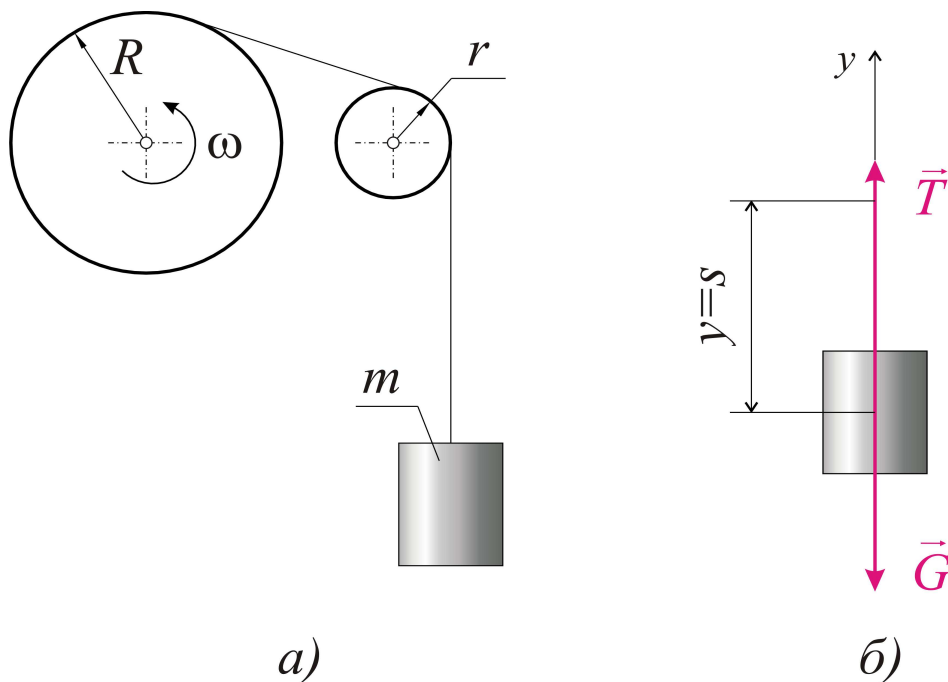


Рис. 1.77. К примеру 1.22: а) исходная схема; б) расчётная схема

Для решения последнего уравнения необходимо знать, как меняется скорость любой точки принадлежащей нити, неизменно связанной с самим грузом.

Возьмем точку, одновременно принадлежащую нити и лежащую на внешнем диаметре барабана.

Барабан совершает вращательное движение.

Линейная, или окружная, скорость V точки, лежащей на его внешнем диаметре, определится как

$$V = \omega \cdot R \Rightarrow 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ м/с} = \text{const}.$$

Очевидно, что груз будет совершать прямолинейное равномерное движение, причём $V = V_y$.

Так как его ускорение $a_y = a = \frac{dV_y}{dt} = 0$, дифференциальное уравнение движения примет вид:

$$0 = T - G \Rightarrow T = G = mg.$$

Таким образом, на груз будет действовать постоянная по модулю и по направлению сила $T = mg$.

В таком случае работа, совершаемая этой силой при перемещении груза: $A = T \cdot s$.

При постоянной скорости величина перемещения груза за единицу времени равна значению самой скорости, т.е. $s_1 = 2 \text{ м}$.

Учитывая то обстоятельство, что работа, совершаемая в единицу времени, представляет собой мощность $N \Rightarrow$

$$N = T \cdot s_1 = mg \cdot s_1 = 100 \cdot 10 \cdot 2 = 2 \text{ кВт}.$$

Ответ: $N = 2 \text{ кВт}$.

1.3.1.10. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Анализируя размерность работы, мы видим, что она совпадает с размерностью кинетической энергии. Очевидно, что между данными характеристиками существует взаимосвязь. Она выражается *теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки*, представляющей собой выражение:

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}, \quad (1.108)$$

где $\sum A_{(M_0 M_1)}$ - алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на материальную точку M при её перемещении из положения M_0 в M_1 ;

$\frac{m V_0^2}{2}$ - кинетическая энергия точки M в положении M_0 и момент времени t_0 ;

$\frac{m V_1^2}{2}$ - кинетическая энергия точки M в положении M_1 и момент времени t_1 .

В соответствии с 1.108, теорему об изменении кинетической энергии материальной точки можно сформулировать следующим образом:

Изменение кинетической энергии материальной точки при её некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Практический смысл данной теоремы заключается в следующем. Данная

теорема позволяет, зная, как при движении точки меняется скорость, оценить работу действующих на неё сил или, наоборот, зная работу действующих сил, определить изменения скорости движения точки.

Пример 1.23. Телу, неизвестной массы m (рис. 1.78), находящемуся в нижней точке шероховатой наклонной поверхности с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и коэффициентом трения скольжения $f=0,2$, сообщили скорость 10 м/с . Определить наибольшее значение высоты h , которого сможет оно достичь. Тело считать материальной точкой.

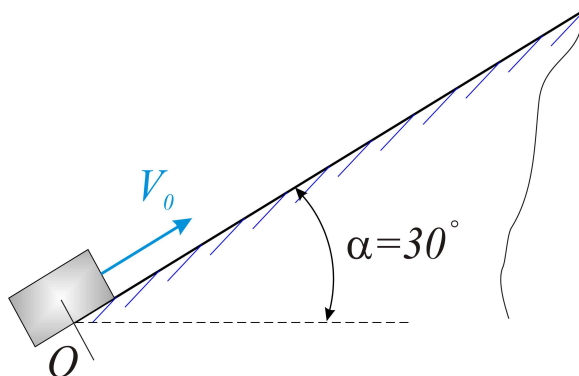


Рис. 1.78. К условию примера 1.23

Решение. Очевидно, что тело, имея начальную скорость $V_0=10\text{ м/с}$, на уровне h остановится, т.е. будет иметь скорость $V_1=0$. На тело,двигающееся по наклонной шероховатой поверхности, будет действовать сила тяжести G , а также сила трения $F_{\text{тр}}$, рис. 1.79.

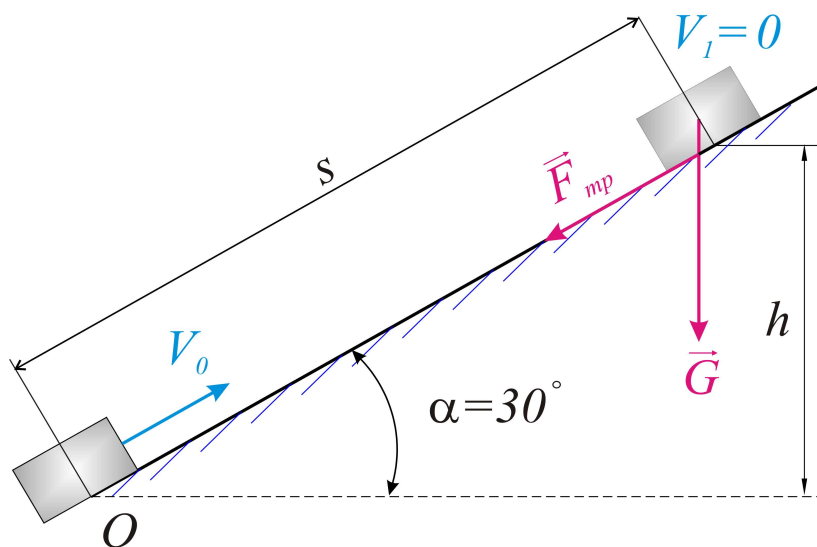


Рис. 1.79. К решению примера 1.23

Используем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = \sum A_{0-1}.$$

Определим работы всех сил, совершаемые на этом перемещении:

Работа силы тяжести $A_G = -mg \cdot h$.

Работа силы трения $A_{mp} = -mg \cdot f \cdot \cos \alpha \cdot s$.

С учётом того, что $s = \frac{h}{\sin \alpha}$,

$$A_{mp} = -mg \cdot f \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Таким образом, теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в отношении к рассматриваемой задаче можно представить в следующем виде:

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = -mgh - mg \cdot f \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Упрощаем уравнение:

$$0,5(V_1^2 - V_0^2) = -gh(1 + f \cdot \operatorname{ctg} \alpha).$$

Выражаем искомую величину:

$$h = \frac{(V_1^2 - V_0^2)}{-2g(1 + f \cdot \operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{0^2 - 10^2}{-2 \cdot g(1 + 0,2 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ)} \Rightarrow h \approx 3,79 \text{ м}.$$

Ответ: $h \approx 3,79 \text{ м}$.

1.3.1.11. КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Колебания можно подразделить на *свободные незатухающие*, *свободные с наличием вязкого сопротивления (затухающие)* и *вынужденные*.

1.3.1.12. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В этом случае рассматривают колебательное движение материальной точки без учета среды сопротивления. Закон движения прямолинейных колебаний материальной точки вдоль оси x при свободных незатухающих колебаниях в дифференциальной форме имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0. \quad (1.109)$$

Данное выражение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого будет функция:

$$x = A \sin(kt + \alpha). \quad (1.110)$$

Скорость материальной точки V при этом можно определить как

$$V = V_x = \dot{x} = A k \cos(kt + \alpha). \quad (1.111)$$

Так как закон колебательного движения содержит периодическую

функцию, то такие колебания считаются *гармоническими*.

Рассмотрим параметры, входящие в данные уравнения:

$\frac{C_1}{\cos \alpha} = \frac{C_2}{\sin \alpha} = A$ - амплитуда свободных незатухающих колебаний, [м];

$k^2 = \frac{c}{m}$, поэтому $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - круговая частота, [с⁻¹]; $(kt + \alpha) = \varphi$ - фаза

колебаний, [рад]; α - начальная фаза колебаний [рад];

c - постоянная, характеризующая восстанавливающую силу упругого элемента (его жесткость), [Н/м]. Параметры A и α находятся из начальных данных.

Дадим краткую характеристику параметров колебательного движения.

Амплитудой колебаний называется величина, равная наибольшему отклонению материальной точки от центра колебаний O . Часто используют величину, равную удвоенному значению амплитуды колебаний, это так называемый *размах колебаний*. Для характеристики гармонических колебаний также используют величину, называемую *периодом колебаний* T , [с].

Период колебаний связан с круговой частотой k следующей зависимостью:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.112)$$

Величину, обратную периоду колебаний T , называют *частотой колебаний* ν , измеряемой в СИ: [с⁻¹] или [Гц].

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.113)$$

Частота колебаний – это число полных колебаний, совершаемых точкой за 1 сек.

Круговая частота – это число полных колебаний, совершаемых точкой за время 2π сек.

Как мы видим, круговая частота k отличается от частоты колебаний ν на величину постоянного множителя 2π , т.е.:

$$k = 2\pi \cdot \nu. \quad (1.114)$$

При рассмотрении свободных незатухающих колебаний при действии на материальную точку постоянной силы (например, силы тяжести P) необходимо учитывать смещение её равновесного положения (центра колебаний) в сторону действия этой силы на величину λ_{cm} , называемую *статическим отклонением*, выраженную в [м] и определяемую следующим выражением:

$$\lambda_{cm} = P/c. \quad (1.115)$$

В случае, когда единственной постоянной силой, действующей на материальную точку массой m , является сила тяжести $P=mg$, период колебаний T можно определить по формуле:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m\lambda_{cm}}{P}}, \quad \text{или} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}. \quad (1.116)$$

При использовании в качестве *восстанавливающей* силы упругости нескольких элементов их *эквивалентная жесткость* $c_{\text{экв}}$ рассчитывается следующим образом (рис. 1.80).

При параллельном соединении двух элементов разной жесткости c_1, c_2 с учетом необходимого при прямолинейных колебаниях условия $l_1/l_2=c_2/c_1$ для линии подвеса груза (см. рис. 1.80, а) эквивалентная жесткость $c_{\text{экв}}$ этих элементов будет равна:

$$c_{\text{экв}}=c_1+c_2. \quad (1.117)$$

При последовательном соединении двух элементов с жесткостью c_1 и c_2 (см. рис. 1.80, б) их эквивалентная жесткость $c_{\text{экв}}$ определяется по формуле:

$$\frac{1}{c_{\text{экв}}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}. \quad (1.118)$$

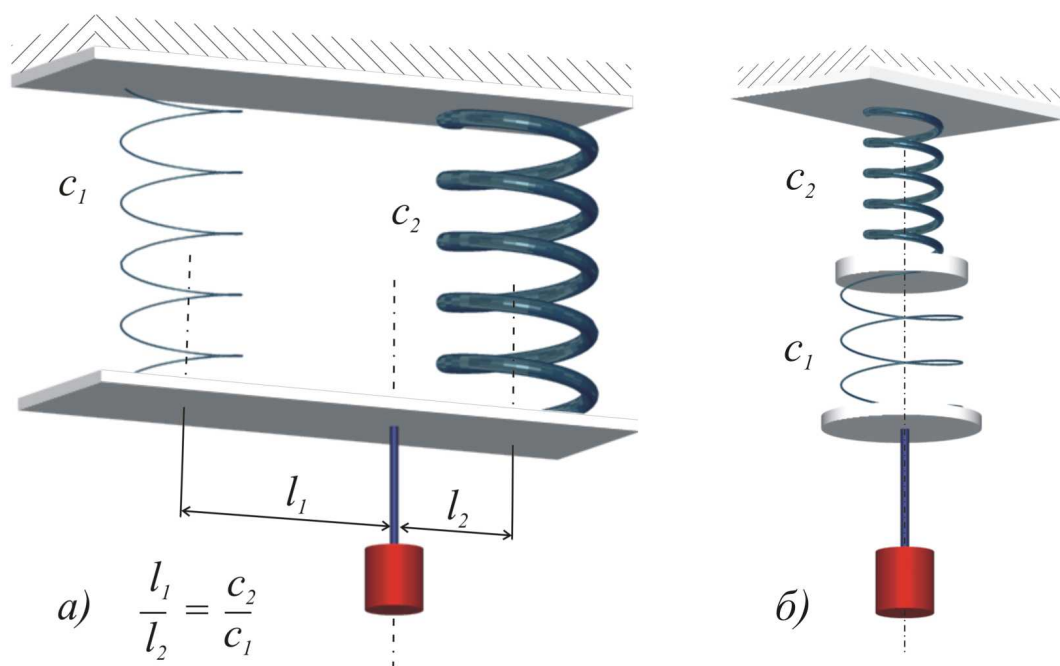


Рис. 1.80. К расчету эквивалентной жесткости $c_{\text{экв}}$ упругих элементов: а) при параллельном соединении; б) при последовательном соединении

1.3.1.13. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В этом случае рассматривают колебательное движение материальной точки в вязкой среде (с учётом сил вязкого трения).

Сила вязкого трения R зависит от скорости V материальной точки. При прямолинейных колебаниях материальной точки вдоль оси x данная зависимость может быть линейной $R_x = -\mu V_x$ или квадратичной $R_x = -\mu V_x^2$. Знак «минус» говорит о том, что сила вязкого трения всегда направлена противоположно вектору скорости. В данных выражениях μ представляет собой коэффициент сопротивления среды. Рассмотрим свободные затухающие колебания с прямо пропорциональной линейной зависимостью. Дифференциальное уравнение движения материальной точки при этом выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 \cdot x = 0, \quad (1.119)$$

где
$$\frac{c}{m} = k^2 \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{m} = 2b. \quad (1.120)$$

Для свободных затухающих колебаний принято использовать следующие характеристики.

Модуль логарифма *декремента затуханий* bT_1 называется *логарифмическим декрементом*, т.е: $L = |\ln(bT_1)|$.

Величина T_1 - *период затухающих колебаний*. Под периодом затухающих колебаний принято принимать промежуток времени, равный периоду функции $\sin(k_1 t + \alpha)$ и определяемый выражением:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \quad (1.121)$$

Здесь $\sqrt{k^2 - b^2} = k_1, [c^{-1}]$ - *круговая частота затухающих колебаний*.

В зависимости от того, как соотносится восстанавливающая сила и сила сопротивления среды при движении материальной точки, принято различать три случая.

Первый случай

В случае, когда сопротивление среды мало по сравнению с восстанавливающей силой ($k > b$), решением дифференциального уравнения (1.119) будет выражение:

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (1.122)$$

В отличие от свободных незатухающих колебаний (см. (1.110)) в

последнем выражении (см. (1.122)) содержится множитель e^{-bt} , так называемый *декремент затухающих колебаний*, учитывающий сопротивление движению, благодаря которому с течением времени t_1 амплитуда колебаний $A_1 = A e^{-bt}$ убывает по отношению к начальной амплитуде A по закону геометрической прогрессии.

Движение материальной точки в первом случае является колебательным относительно некоторого равновесного положения с постепенным уменьшением амплитуды колебаний.

Второй случай

В случае, если $k=b$, сопротивление, оказываемое средой на материальную точку, равно воздействию восстанавливающей силы, и решение дифференциального уравнения (1.119) имеет вид:

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t). \quad (1.123)$$

Тогда движение материальной точки перестаёт быть колебательным.

Материальная точка при этом, находясь вне равновесного положения, будет асимптотически стремиться к нему.

Третий случай

Когда $k < b$, сопротивление, оказываемое средой по сравнению с восстанавливающей силой, велико и решение дифференциального уравнения (1.119) примет вид:

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}, \quad (1.124)$$

где $r = \sqrt{b^2 - k^2}$.

В этом случае движение материальной точки также не является колебательным. Материальная точка, находясь вне равновесного положения, будет стремиться к нему асимптотически.

1.3.1.14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если на точку кроме постоянной восстанавливающей силы действует переменная сила Q , изменяющаяся по гармоническому закону, то такие колебания считаются *вынужденными*, а сила Q считается *возмущающей* силой.

Рассмотрим частный случай, когда проекция возмущающей силы на ось x при прямолинейных колебаниях меняется по гармоническому закону: $Q_x = Q_0 \sin pt$ (проекция возмущающей силы может меняться и по другому гармоническому закону). Вынужденные колебания могут рассматриваться с учетом сопротивления среды и при его отсутствии.

Для вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления среды дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \sin pt, \quad (1.125)$$

где

$$\frac{c}{m} = k^2 \quad \text{и} \quad \frac{Q_0}{m} = P_0. \quad (1.126)$$

Здесь $Q_0, [H]$ - величина начальной возмущающей силы;

$P_0, \left[\frac{M}{c^2} \right]$ - начальное ускорение материальной точки массой m ; $p, [c^{-1}]$ - круговая частота возмущающей силы.

Решением уравнения (1.125) будет являться выражение вида:

$$x = A \sin(kt + \alpha) + B \sin pt. \quad (1.127)$$

В этом выражении:

A, k - *амплитуда* и *круговая частота собственных колебаний* материальной точки соответственно;

B, p - *амплитуда* и *круговая частота вынужденных колебаний* материальной точки соответственно.

Амплитуда вынужденных колебаний B определяется по формуле:

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}, \quad \text{или} \quad B = \frac{\lambda_0}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|}, \quad (1.128)$$

где $\frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = \lambda_0$ - величина статического отклонения материальной точки под действием начальной возмущающей силы Q_0 . Проанализировав уравнение (1.127), можно прийти к выводу о том, что вынужденные колебания представляют собой совокупность собственных колебаний материальной точки и её вынужденных колебаний. Для вынужденных колебаний принято использовать следующие характеристики:

Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний к круговой частоте k её собственных колебаний:

$$z = \frac{p}{k}. \quad (1.129)$$

Коэффициент расстройки показывает степень несовпадения (расстройку) частот вынужденных и собственных колебаний.

Коэффициентом динамичности η называется отношение амплитуды вынужденных колебаний B к статическому отклонению λ_0 материальной точки под действием начальной возмущающей силы Q_0 , т.е.:

$$\eta = \frac{B}{\lambda_0}. \quad (1.130)$$

Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического отклонения λ_0 и зависит от соотношения частот (коэффициента расстройки z).

Коэффициент динамичности η и коэффициент расстройки z связаны между собой зависимостью:

$$\eta = \frac{1}{1-z^2}. \quad (1.131)$$

В случае, если круговая частота собственных колебаний совпадает с круговой частотой вынужденных колебаний, наступает явление *резонанса*.

При резонансе $p=k$ коэффициент расстройки $z=1$ (формула (1.129)); коэффициент динамичности $\eta=\infty$ (формула (1.131)). При конечном значении статического отклонения λ_0 из выражения (1.130) следует, что амплитуда вынужденных колебаний $B \rightarrow \infty$.

Для вынужденных колебаний с учётом сопротивления среды (например, силы R , пропорциональной первой степени скорости V) дифференциальное уравнение движения будет имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P_0 \sin pt. \quad (1.132)$$

Решением данного уравнения будет выражение:

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1t + \alpha) + B \sin(pt - \beta). \quad (1.133)$$

В данном выражении

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 \cdot p^2}} \quad \text{и} \quad \beta = \arctg\left(\frac{2bp}{k^2 - p^2}\right). \quad (1.134)$$

Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления, также как и вынужденные колебания без сопротивления, представляют собой совокупность собственных и вынужденных колебаний.

Собственные колебания происходят при этом по закону:

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1t + \alpha), \quad (1.135)$$

а вынужденные:

$$x = B \sin(pt - \beta). \quad (1.136)$$

Установлено, что собственные колебания быстро затухают в течение так называемого *времени установления* t_y . Таким образом, по истечении времени t_y точка фактически будет совершать колебания по закону, определяемому выражением (1.136). Для вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды можно использовать следующие факты:

С учетом того, что $h = b/k$ - величина, характеризующая сопротивление

среды, то значение β , [rad], - характеризующее *сдвиг фазы вынужденных колебаний* по отношению к фазе возмущающей силы (рис. 1.81), можно выразить как

$$\beta = \arctg\left(\frac{2hz}{1-z^2}\right). \quad (1.137)$$

Проанализировав теоретический материал, можно прийти к выводу о том, что явление резонанса при вынужденных колебаниях с учетом среды сопротивления фактически наступает при значениях коэффициента расстройки z , еще не достигнувшего единицы.

$$z_p = \sqrt{1-2h^2}. \quad (1.138)$$

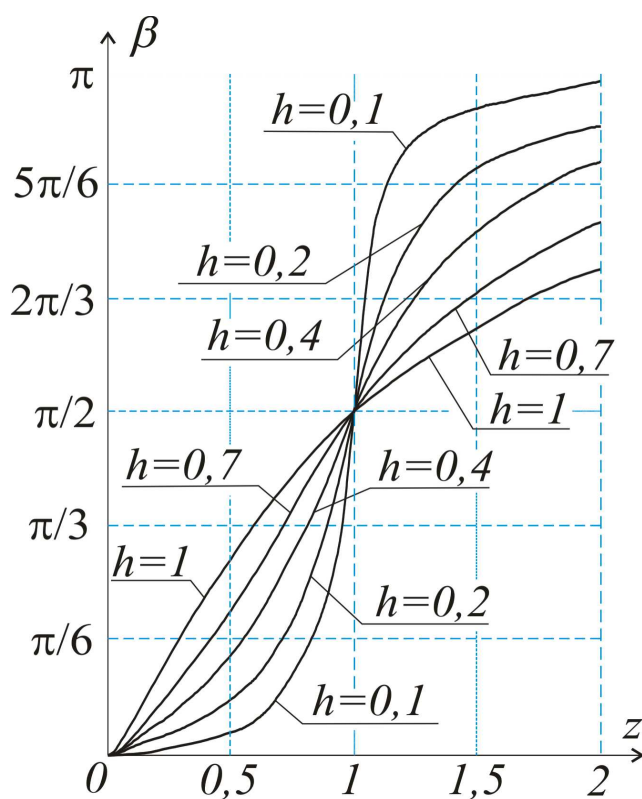


Рис. 1.81. График зависимости сдвига фазы β от коэффициента расстройки z

Согласно выражению (1.138), при малых значениях коэффициента сопротивления среды h значение коэффициента расстройки при резонансе $z_p \approx 1$. Оттуда же следует, что при больших значениях h (см. выражения (1.134), (1.137), (1.138)) явление резонанса не ведет к значительному увеличению амплитуды вынужденных колебаний B (рис. 1.82).

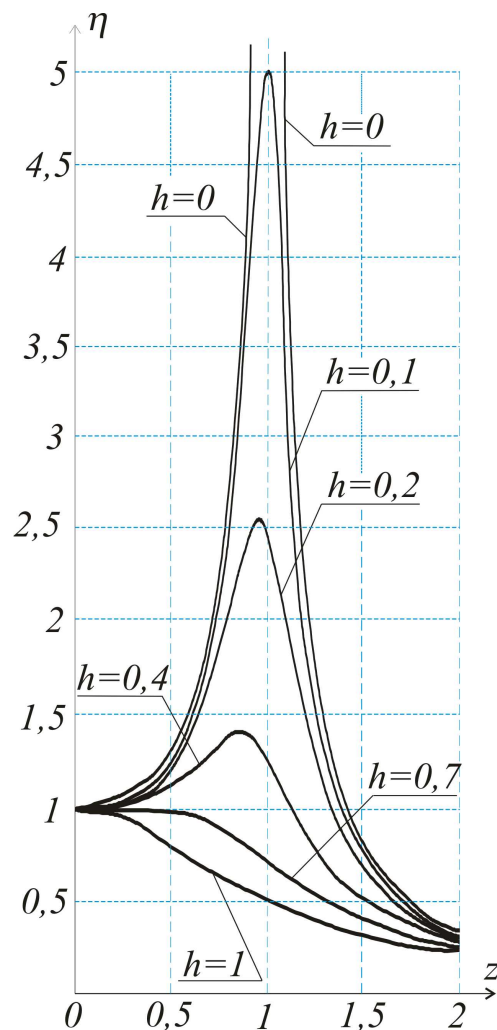


Рис. 1.82. График зависимости коэффициента динамичности η от коэффициента расстройки z

По тому, как соотносятся круговые частоты вынужденных и собственных колебаний, различают следующие частные случаи.

Первый случай

Величина коэффициента расстройки $z \approx 0$. Согласно выражению (1.134), подобная ситуация возникает, когда $p \ll k$. В таком случае амплитуда вынужденных колебаний примерно равна величине статического отклонения ($B \approx \lambda_0$). Колебания при этом, очевидно, происходят с амплитудой, равной статическому отклонению. Сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы при этом (см. (1.137)) будет примерно равен нулю ($\beta \approx 0$).

Второй случай

Величина коэффициента расстройки $z \rightarrow \infty$. Согласно выражению (1.134), подобная ситуация возникает, когда $p \gg k$.

В таком случае амплитуду вынужденных колебаний при малом сопротивлении среды можно приближенно подсчитать по формуле:

$$B \approx \frac{\lambda_0}{z^2}. \quad (1.139)$$

Третий случай

Величина коэффициента расстройки $z \rightarrow 1$. Согласно выражению (1.134), подобная ситуация возникает, когда $p \approx k$ и сопровождается явлением резонанса.

В таком случае амплитуду вынужденных колебаний B_p можно приближенно подсчитать по формуле:

$$B_p \approx \frac{\lambda_0}{2h}. \quad (1.140)$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы при этом приближенно можно определить как $\beta_p \approx \pi/2$ (рис. 1.81).

При вынужденных колебаниях с сопротивлением среды в случае резонанса амплитуда B_p устанавливается в течение так называемого *времени установления* t_y . Чем меньше сопротивление среды, тем больше будет время t_y . При отсутствии сопротивления ($h \rightarrow \infty$) процесс увеличения амплитуды колебаний может происходить бесконечно долго.

Пример 1.24

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний имеет вид $x = A e^{-0,5t} \sin(4t + \alpha)$. Определить коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплено тело, если его масса $m = 5 \text{ кг}$.

Решение: В общем виде решение дифференциального уравнения имеет вид: $x = A e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha)$. Ассоциируем коэффициенты, входящие в заданное уравнение, определяем для данного колебательного процесса: $b = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $k_1 = 4 \text{ с}^{-1}$.

Используем формулу:

$$k_1^2 = k^2 - b^2 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + b^2 = 4^2 + 0,5^2 = 16,25.$$

$$\text{Так как } \frac{c}{m} = k^2 \Rightarrow c = m \cdot k^2 = 5 \cdot 16,25 = 81,25 \text{ Н / м}.$$

Ответ: $c = 81,25 \text{ Н / м}$.

Пример 1.25

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид: $3\ddot{x} + 36\dot{x} + cx = 0$. Найти максимальное значение коэффициента жесткости c , при котором движение будет аperiodическим.

Решение: Работаем с уравнением

$$3\ddot{x} + 36\dot{x} + cx = 0.$$

Делим левую и правую часть уравнения на 3:

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + \frac{c}{3}x = 0.$$

Пишем дифференциальное уравнение в каноническом виде:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0 \Rightarrow$$

$$2b = 12; \quad k^2 = \frac{c}{3}.$$

Рассмотрим предельный случай, соответствующий апериодическому затухающему движению, когда $b = k$.

Приравниваем и получаем: $\frac{c}{3} = 6^2 \Rightarrow c = 108 \text{ Н/м}$.

Ответ: $c = 108 \text{ Н/м}$.

Пример 1.26

На тело, которое подвешено к пружине, действует вертикальная вынуждающая сила $F = 60 \sin 20t$. Определить коэффициент динамичности, если угловая частота собственных колебаний тела $k = 40 \text{ рад/с}$.

Решение: Задача на вынужденные колебания. Напишем канонический вид уравнения для вынуждающей силы, откуда определим круговую частоту p вынужденных колебаний: $Q = Q_0 \sin pt \Rightarrow Q_0 = 60 \text{ Н}; p = 20 \text{ с}^{-1}$.

Определим коэффициент расстройки z . Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте k её свободных колебаний. Т.е. $z = p/k \Rightarrow 20/40 = 0,5$. Далее, используем зависимость коэффициента

расстройки и коэффициента динамичности: $\mu = \frac{1}{|1 - z^2|} = \frac{1}{|1 - 0,5^2|} \Rightarrow \mu = 1,33$.

Ответ: $\mu = 1,33$.

1.3.1.15. ПОНЯТИЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Применение законов Ньютона не является единственным путём к решению задач механики. В ряде случаев применение общих положений (принципов механики) позволяет найти более рациональное решение. Один из таких общих принципов механики называется *принципом Даламбера*. Введем следующее понятие:

Векторная величина $\vec{\Phi}$, равная по модулю произведению массы точки на её ускорение и направленная противоположно этому ускорению, называется *силой инерции материальной точки*.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \quad (1.141)$$

Тогда *принцип Даламбера* для материальной точки можно представить в виде выражения:

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 \quad (1.142)$$

и сформулировать следующим образом:

Если в любой момент времени к действующим на материальную точку активным силам и реакциям связей присоединить силы инерции, то полученная система оказывается уравновешенной.

1.3.1.16 СЛОЖНОЕ (АБСОЛЮТНОЕ) И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С ПОЗИЦИИ ДИНАМИКИ

Отметим, что второй закон динамики и полученные из него теоремы верны только для абсолютного движения точки, т.е. по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Для абсолютного движения:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \quad (1.143)$$

Абсолютное ускорение в данном выражении можно представить как $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

Введём следующие обозначения: $-m\vec{a}_e = \vec{\Phi}_e$ и $-m\vec{a}_c = \vec{\Phi}_c$.

Вектор $\vec{\Phi}_e$ называется *переносной силой инерции*. Он направлен в сторону, противоположную вектору ускорения \vec{a}_e материальной точки в переносном движении.

Вектор $\vec{\Phi}_c$ называется *кориолисовой силой инерции*. Он направлен в сторону, противоположную вектору кориолисова ускорения \vec{a}_c материальной точки.

В результате подстановки и преобразования выражения (1.143) получим уравнение относительного движения:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (1.144)$$

Сравнивая (1.143) и (1.144), можно прийти к выводу о том, что все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как и для абсолютного движения, но с прибавлением переносной $\vec{\Phi}_e$ и кориолисовой $\vec{\Phi}_c$ сил инерции.

Данная добавка учитывает влияние на относительное движение материальной точки перемещения подвижных осей.

В случае, если подвижная система отсчёта движется поступательно, то кориолисово ускорение $\vec{\Phi}_c = 0$ и закон относительного движения принимает вид:

$$m\vec{a}_e = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e. \quad (1.145)$$

В случае, если подвижная система отсчёта движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\vec{\Phi}_c = 0$ и $\vec{\Phi}_e = 0$.

Закон относительного движения при этом будет таким же, как и закон абсолютного (сложного) движения. Поэтому такой подвижной системе отсчёта также свойственна инерциальность.

Полученный результат позволяет сделать вывод о невозможности путем механических экспериментов установить, находится ли данная система в покое

или совершает поступательное равномерное прямолинейное движение.

Данный вывод был получен Галилеем и носит название *принципа относительности классической механики*.

В случае, если точка по отношению к подвижной системе находится в покое, уравнение относительного движения принимает вид:

$$\sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (1.146)$$

Данное выражение является *уравнением относительного равновесия материальной точки*. Отсюда можно сделать вывод о том, что уравнение относительного равновесия составляется так же, как и уравнения равновесия для неподвижной системы отсчета, но с прибавлением к действующим на материальную точку переносной силы инерции.

В случае, когда кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c \neq 0$, то:

$$\vec{\Phi}_c = -m \vec{a}_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{V}_r). \quad (1.147)$$

Модуль кориолисовой силы инерции можно определить как

$$\vec{\Phi}_c = 2m \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\vec{V}_r| \cdot \sin \alpha, \quad (1.148)$$

где $\alpha = (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r)$.

Так как сила $\vec{\Phi}_c$ перпендикулярна \vec{V}_r , то уравнение (1.144) в проекции на касательную примет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau} + \Phi_{e\tau}. \quad (1.149)$$

По этой же причине $(\vec{\Phi}_c \perp \vec{V}_r)$ работа кориолисовой силы инерции при относительном перемещении будет равна нулю.

В связи с этим *теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении* имеет вид:

$$\frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2} = \sum A_k + A(\vec{\Phi}_e), \quad (1.150)$$

где $\sum A_k$ - сумма работ активных сил на относительном перемещении;

$A(\vec{\Phi}_e)$ - работа переносной силы инерции при этом перемещении.

В данном выражении кинематические и силовые параметры относятся только к относительному движению.

Пример 1.27

Груз 1 массой $m_1 = 2 \text{ кг}$ (рис.1.83) спускается вниз по наклонной плоскости тела 2. Тело 2 движется в вертикальных направляющих вниз с

ускорением $a_2 = 4 \text{ м/с}^2$. Определить силу давления груза 1 на тело 2.

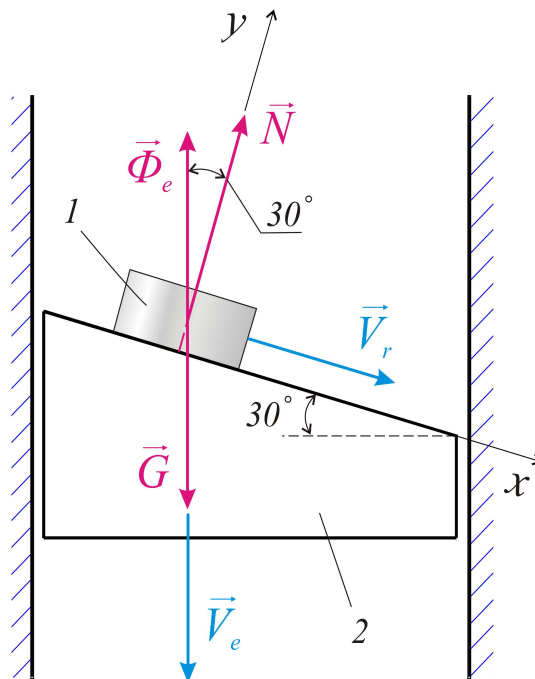


Рис. 1.83. К примеру 1.27

Решение: Движение груза 1 является сложным. Исходя из этого, можно записать уравнение его относительного движения в векторном виде:

$$m \vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c.$$

Далее рассуждаем таким образом. Так как переносное движение груза вдоль наклонной плоскости является поступательным, то кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c = 0$. Поэтому векторное уравнение слегка упростится:

$m \vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e$. Составим дифференциальное уравнение относительного движения, в отношении оси y :

$$m \cdot \ddot{y}_r = N - G \cdot \cos 30^\circ + \Phi_e \cdot \cos 30^\circ.$$

Согласно условию задания груз 1 движется только по наклонной поверхности вдоль оси x , поэтому $\ddot{y}_r = 0 \Rightarrow$ дифференциальное уравнение движения в отношении оси y примет вид:

$$0 = N - G \cdot \cos 30^\circ + \Phi_e \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$N = G \cdot \cos 30^\circ - \Phi_e \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$N = m \cos 30^\circ (g - a_2) \Rightarrow N = 2 \cos 30^\circ (9,8 - 4) \Rightarrow$$

$$N = 10,05 \text{ Н}.$$

Так как сила давления груза 1 по модулю $Q = N$ (направлена в противоположную сторону)

Ответ: $Q = 10,05 \text{ Н}$.

Пример 1.28

Шарик массой $m = 2 \text{ кг}$ (рис. 1.84) движется со скоростью

$V_r = \frac{2\pi}{3} \text{ м/с}$ относительно вертикальной трубки, которая на расстоянии

$l=0,4\text{ м}$ прикреплена к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega=3\text{ с}^{-1}$. Определить переносную силу инерции шарика Φ_e .

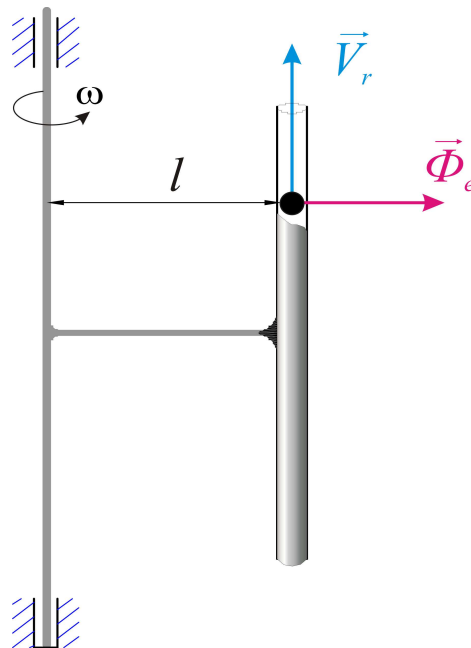


Рис. 1.84. К примеру 1.28

Решение: В условии задачи имеется логический «мусор», поэтому не все данные задачи будут использованы.

По определению: $\Phi_e = m \cdot a_e$. Так как вращение трубки равномерное, то $a_e = a_n = V_e^2 / \rho \Rightarrow$
 $\Phi_e = m \cdot \frac{V_e^2}{\rho} = m \cdot \frac{(\omega \cdot l)^2}{l} = m \cdot \omega^2 \cdot l = 2 \cdot 3^2 \cdot 0,4 = 7,2\text{ Н}.$

Ответ: $\Phi_e = 7,2\text{ Н}.$

1.3.2. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.3.2.1. ПОНЯТИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В данном подразделе рассматривается динамика твердых тел и механических систем. Так как твердое тело может совершать вращательное и плоскопараллельное движение, то вопросы динамики в отношении твердого тела, а тем более в отношении механических систем, считаются более сложными. Рассмотрим следующие базовые определения:

Геометрически неизменяемый объект, размерами которого при решении задач нельзя пренебречь, называется в теоретической механике *твердым телом*.

Совокупность взаимосвязанных и механически взаимодействующих

между собой материальных точек и/или твердых тел называется *механической системой*.

Механическое взаимодействие между объектами, как необходимое условие существования механической системы, отражается в действии сил. Действующие на механическую систему активные силы и реакции связей подразделяются на внешние и внутренние.

Внешними называются силы \vec{F}_k^e , действующие на материальные точки (тела) системы извне.

Внутренними называются силы \vec{F}_k^i , с которыми материальные точки (тела) системы взаимодействуют друг с другом.

С учетом допущения теоретической механики об абсолютной жесткости (геометрической неизменяемости) тел внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. Геометрическая сумма (*главный вектор*) *всех внутренних сил механической системы* равняется нулю в соответствии с третьим законом динамики:

$$\sum \vec{F}_k^i = 0. \quad (1.151)$$

2. Сумма моментов (*главный момент*) *всех внутренних сил системы* относительно любой точки и/или любой оси равняется нулю:

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = 0; \quad \sum M_x(\vec{F}_k^i) = 0. \quad (1.152)$$

Если система представляет собой абсолютно твердое тело, то внутренние силы образуют уравновешенную систему сил.

Для системы, образованной телами и/или материальными точками, даже несмотря на то, что главный вектор и главный момент внутренних сил механической системы равны нулю, объекты системы могут совершать взаимные перемещения под действием внутренних сил, перераспределяя массу в системе и, соответственно, влияя на движение системы в целом.

1.3.2.2. МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. РАДИУС ИНЕРЦИИ

Из материала предыдущего параграфа следует, что на движение механической системы в целом оказывает влияние действие как внешних, так и внутренних сил, участвующих в перераспределении масс данной системы. Таким образом, движение системы не только будет определяться действием внешних сил, но и будет зависеть от массы системы и её распределения.

Рассмотрим данный вопрос поподробней. Введём следующее определение:

Масса механической системы M представляет собой арифметическую сумму масс всех точек и/или твердых тел, входящих в рассматриваемую систему.

$$M = \sum m_k. \quad (1.153)$$

С целью оценки величины и характера распределения масс для механической системы в динамике применяются ряд характеристик.

1. Координаты центра масс.

Геометрическая точка $C(x_C, y_C, z_C)$ называется *центром масс (центром инерции) механической системы*, если её координаты удовлетворяют выражениям:

$$x_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot x_k; \quad y_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot y_k; \quad z_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot z_k, \quad (1.154)$$

где M - масса всей механической системы;

m_k - масса k -го объекта механической системы;

$x_k; y_k; z_k$ - координаты центра тяжести k -го объекта механической системы.

Геометрическое место центра масс механической системы можно определить при помощи радиуса-вектора:

$$\vec{r}_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot \vec{r}_k, \quad (1.155)$$

где \vec{r}_k - радиус-вектор центра массы k -го объекта, входящего в данную механическую систему.

Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положение центра масс и центра тяжести совпадает.

Понятие центра масс, в отличие от понятия центра тяжести, может быть применено в отношении любой механической системы, то есть имеет более общее значение.

2. Момент инерции тела (механической системы).

Моментом инерции тела (механической системы) J_z относительно оси z (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (объектов системы) на квадраты их расстояний до этой оси:

$$J_z = \sum m_k \cdot h_k^2. \quad (1.156)$$

Согласно (1.156), осевые моменты инерции - величины всегда положительные, не равные нулю. В системе СИ осевые моменты имеют единицу измерения: $[кг \cdot м^2]$.

Физический смысл момента инерции, как динамической характеристики, заключается в том, что он является мерой инертности тела (системы) при вращательном движении, по аналогии с массой, являющейся мерой инертности в поступательном движении.

При определении моментов инерции относительно декартовых осей для механических систем, представленных материальными точками (телами),

применяют следующие формулы:

$$J_x = \sum m_k \cdot (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum m_k \cdot (x_k^2 + z_k^2); \quad J_z = \sum m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2), \quad (1.157)$$

где m_k - масса k -го объекта механической системы;

$x_k; y_k; z_k$ - координаты центра тяжести k -го объекта механической системы в декартовой системе координат.

Для некоторых однородных тел моменты инерции можно определить, используя готовые формулы.

1. Для тонкого однородного стержня массой M и длиной l (рис. 1.85):

$$J_A = \frac{M \cdot l^2}{3}; \quad (1.158)$$

$$J_z = \frac{M \cdot l^2}{12}. \quad (1.159)$$

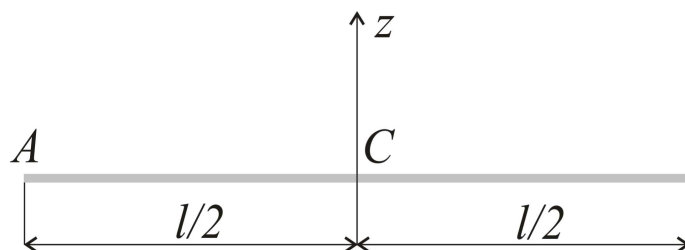


Рис. 1.85. К определению характеристик тонкого однородного стержня

2. Для тонкого круглого однородного кольца массой M и радиусом r (рис. 1.86):

$$J_C = M \cdot r^2. \quad (1.160)$$

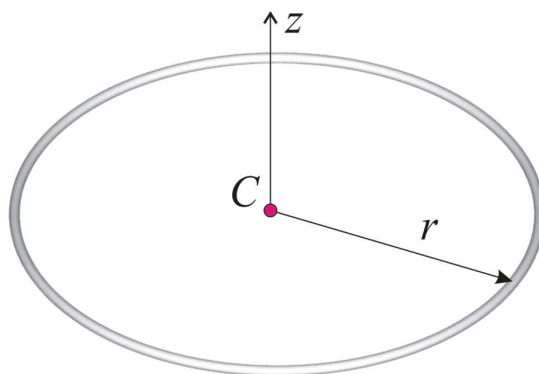


Рис. 1.86. К определению характеристик тонкого однородного кольца

3. Для тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом r

(рис. 1.87):

$$J_z = M \cdot r^2. \quad (1.161)$$

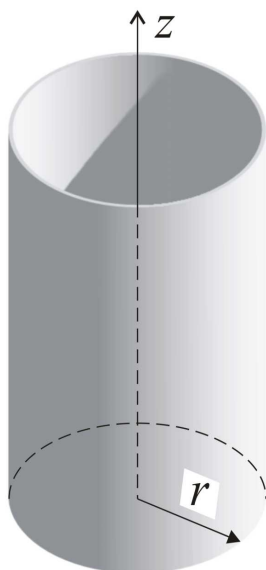


Рис. 1.87. К определению характеристик тонкой цилиндрической оболочки

4. Для тонкого круглого диска массой M и радиусом r (рис. 1.88):

$$J_x = J_y = \frac{M \cdot r^2}{4}; \quad (1.162)$$

$$J_z = \frac{M \cdot r^2}{2}. \quad (1.163)$$

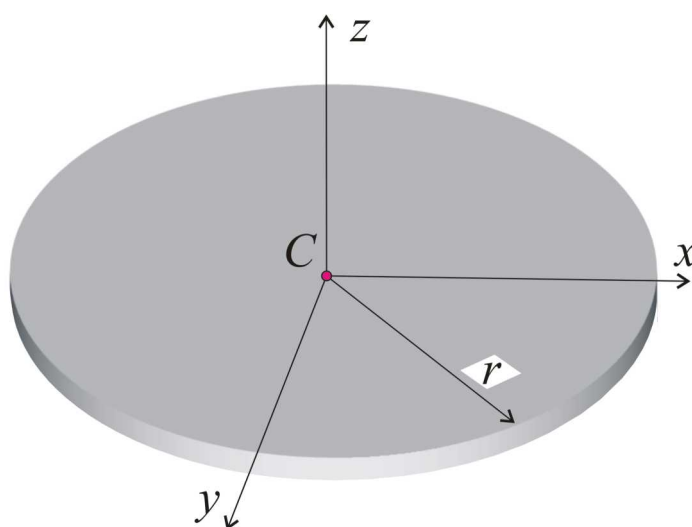


Рис. 1.88. К определению характеристик круглого тонкого однородного диска
5. Для однородной прямоугольной пластины $a \times b$ и массой M (рис.

1.89):

$$J_x = \frac{M \cdot b^2}{3}; \quad (1.164)$$

$$J_y = \frac{M \cdot a^2}{3}; \quad (1.165)$$

$$J_A = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}. \quad (1.166)$$

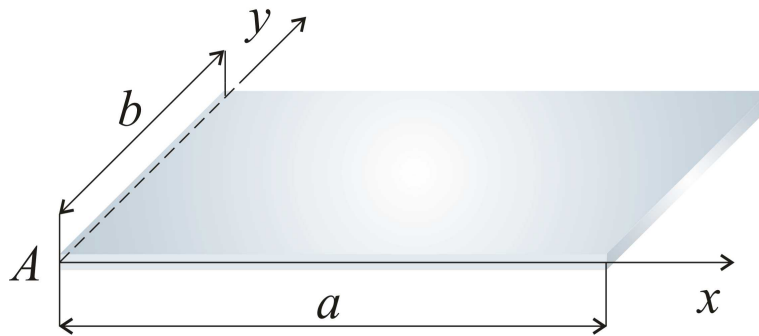


Рис. 1.89. К определению характеристик тонкой однородной прямоугольной пластины

6. Для круглого цилиндра длиной l , массой M и радиусом r (рис. 1.90):

$$J_x = J_y = M \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right); \quad (1.167)$$

$$J_z = \frac{M \cdot r^2}{2}. \quad (1.168)$$

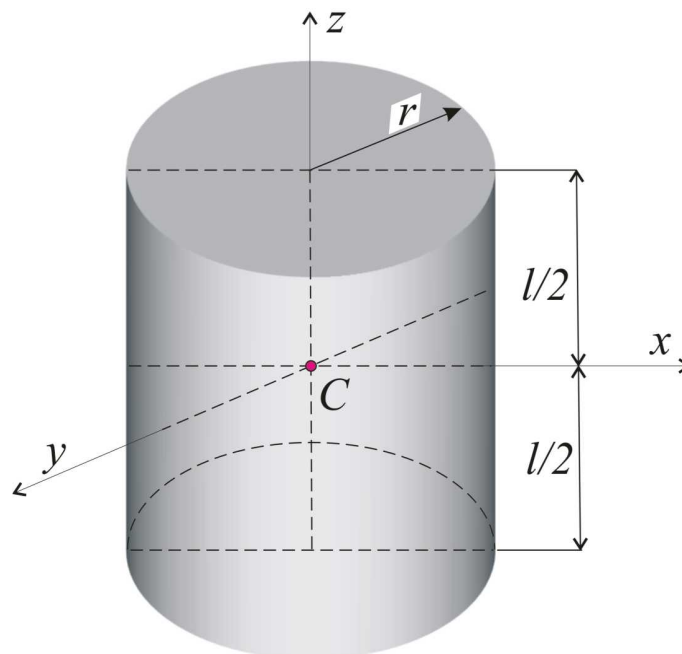


Рис. 1.90. К определению характеристик круглого цилиндра

7. Для круглого полого вала наружным радиусом R , внутренним

радиусом r и массой m (рис. 1.91):

$$J_z = \frac{m(R^2 - r^2)}{2}. \quad (1.169)$$



Рис. 1.91. К определению характеристик круглого полого вала

8. Для тонкой сферической сферической оболочки радиуса R и массой m (рис. 1.92):

$$J_z = \frac{2mR^2}{3}. \quad (1.170)$$

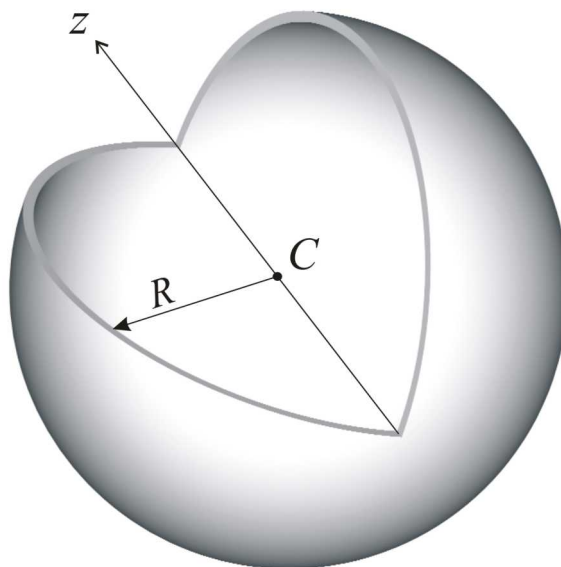


Рис. 1.92. К определению характеристик тонкой сферической оболочки

9. Для круглого конуса массой M и радиусом основания r (рис. 1.93):

$$J_z = 0,3 \cdot M \cdot r^2. \quad (1.171)$$

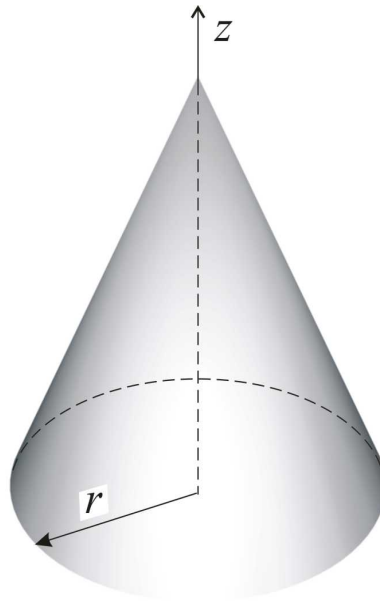


Рис. 1.93. К определению характеристик круглого конуса

10. Для шара радиуса r (рис. 1.94):

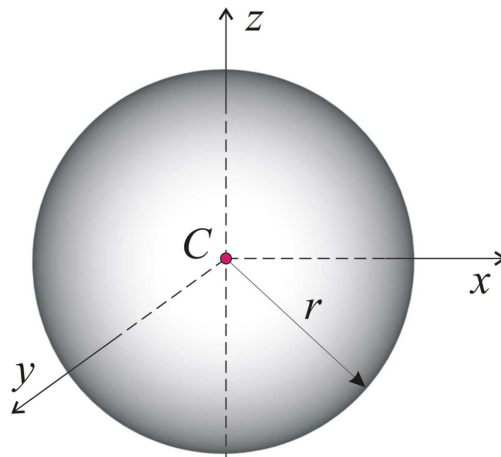


Рис. 1.94. К определению характеристик шара

$$J_x = J_y = J_z = 0,4 \cdot M \cdot r^2. \quad (1.172)$$

$$J_C = 0,6 \cdot M \cdot r^2. \quad (1.173)$$

3. Радиус инерции тела.

В ходе расчётов часто употребляется понятие *радиуса инерции*.

Радиусом инерции тела относительно оси z называется линейная величина ρ_z , определяемая равенством:

$$J_z = M \cdot \rho_z^2. \quad (1.174)$$

Физический смысл радиуса инерции для произвольного твердого тела заключается в том, что его величина соответствует радиусу воображаемой тонкостенной цилиндрической оболочки с эквивалентным для данного тела значением осевого момента инерции.

1.3.2.3. ПОНЯТИЕ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если механическая система представляет собой совокупность материальных точек, то кинетическая энергия такой системы определяется по формуле:

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (1.175)$$

Если механическая система представляет собой совокупность твердых материальных тел, то кинетическая энергия каждого тела определяется в зависимости от характера его движения в рассматриваемой системе:

Для поступательно движущегося тела:

$$T = \frac{m V_C^2}{2}, \quad (1.176)$$

где V_C , $[м/с]$ - скорость центра масс C данного тела.

Для тела, совершающего вращательное движение относительно оси z :

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (1.177)$$

где J_z , $[кг \cdot м^2]$ - момент инерции тела относительно оси z .

Для тела, совершающего плоскопараллельное движение (частный вид *формулы Кёнига*):

$$T = \frac{m V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}. \quad (1.178)$$

Иначе говоря, *при плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения со скоростью его центра масс и энергии вращательного движения вокруг этого центра масс.*

Рассмотрев механическую систему, представляющую собой совокупность твердых тел, приходим к выводу, что кинетическая энергия всей механической системы представляет собой сумму кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k. \quad (1.179)$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1.180)$$

где $T_0 = \sum T_k^0$ - кинетическая энергия механической системы в момент времени t_0 ;

$T_1 = \sum T_k^1$ - кинетическая энергия механической системы в момент времени t_1 ;

$\sum A_k^e$ - сумма работ внешних сил, приложенных к системе;

$\sum A_k^i$ - сумма работ внутренних сил, приложенных к системе.

Если расстояния между любыми двумя взаимодействующими точками остаются постоянными, то такая механическая система считается *неизменяемой*. Для неизменяемой системы сумма работ внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \quad (1.181)$$

В связи с тем, что применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы сопряжено с определением работы, совершаемой телами системы при различных видах движений, рассмотрим понятие *работы* и методы её оценки.

1.3.2.4. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКОЙ РАБОТЕ. РАБОТА В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Определение работы, совершаемой над твердым телом, зависит от рода силы и от того, какое движение совершает данное тело.

а) При поступательном прямолинейном движении тела под действием постоянной по модулю и направлению силы \vec{F} её работа определяется так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha, \quad [\text{Дж}], \quad (1.182)$$

где $F \cdot \cos \alpha$ - проекция вектора силы \vec{F} на ось, вдоль которой осуществляется движение;

s - путь, пройденный телом под действием данной силы;

$\alpha = (\vec{F} \wedge \vec{V})$ - угол между вектором силы и направлением перемещения.

б) При поступательном прямолинейном движении тела под действием постоянной по направлению и переменной по модулю силы $F = f(s)$ её работу можно определить так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds. \quad (1.183)$$

в) Считая силу трения \vec{F}_{mp} постоянной в поступательном движении при скольжении тела по наклонной шероховатой поверхности, её работу можно определить так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = -f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot s, \quad (1.184)$$

где f - коэффициент трения скольжения между телом и шероховатой поверхностью; α - угол наклона шероховатой поверхности к горизонтали.

з) При прямолинейном колебательном движении твердого тела работа переменной силы упругости $\vec{F}_{упр}$ определяется так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = \frac{c}{2} \cdot (\lambda_0^2 - \lambda_1^2), \quad (1.185)$$

где c , $[H/m]$ - жесткость упругого элемента;

λ_0 - отклонение от положения статического равновесия в момент времени t_0 ;

λ_1 - отклонение от положения статического равновесия в момент времени t_1 .

д) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси под действием постоянного момента M его работу можно определить по формуле:

$$A = M \cdot \varphi, \quad (1.186)$$

где φ , $[rad]$ - угол поворота тела относительно начального положения под действием данного момента M , $[H \cdot m]$.

е) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси при действии постоянного момента сопротивления вращению M_{mp} (момента трения) его работа определяется по формуле:

$$A = -M_{mp} \cdot \varphi. \quad (1.187)$$

ж) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси при действии переменного момента $M = f(\varphi)$ его работа при повороте тела на конечный угол φ_1 определяется по формуле:

$$A = \int_0^{\varphi_1} M d\varphi. \quad (1.188)$$

Силовое воздействие на вращающееся тело можно оценить мощностью N , определяемой по формуле:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (1.189)$$

Анализируя выражение (1.189), приходим к выводу о том, что *при постоянной мощности привода вращающегося тела передаваемый вращающий момент будет обратно пропорционален угловой скорости, сообщаемой данному телу.*

и) Работу сил тяжести, действующих на систему (твердое тело), можно определить по формуле:

$$A = \pm P \cdot h_c, \quad (1.190)$$

где P - вес системы (вес тела), h_c - вертикальное перемещение центра масс системы (центра тяжести тела).

При этом работа сил тяжести при перемещении центра вниз считается положительной, при перемещении вверх - отрицательной.

В неизменяемой механической системе после определения работы каждой силы в отдельности получают сумму работ внешних сил в рассматриваемой механической системе $\sum A_k^e$.

1.3.2.5. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количеством движения механической системы называется векторная величина \vec{Q} , равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum m_k \cdot \vec{V}_k. \quad (1.191)$$

Для механической системы, состоящей из твердых тел, *количество движения в такой системе равно произведению массы всей системы на скорость центра её масс C , т.е.:*

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C. \quad (1.192)$$

Для механической системы *теорема об изменении количества движения интерпретируется следующим образом:*

Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему, на протяжении этого промежутка времени, т.е.:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e. \quad (1.193)$$

Закон сохранения количества движения для механической системы говорит о том, что если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

1.3.2.6. ПОНЯТИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если для характеристики поступательного движения системы используется *количество движения* системы, то для характеристики её вращательного движения применяется *кинетический момент*.

Кинетическим моментом, или *главным моментом количества движения системы*, называется величина \vec{K}_O , равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра, т.е.:

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_k \vec{V}_k). \quad (1.194)$$

Определим кинетический момент механической системы, вращающейся относительно неподвижной оси вращения z :

$$K_z = \left(\sum m_k h_k^2 \right) \cdot \omega, \quad \text{или} \quad K_z = J_z \omega. \quad (1.195)$$

Кинетический момент K_z твердого тела, вращающегося относительно оси z , равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость этого тела.

РАЗДЕЛ II. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория механизмов и машин (ТММ) является одной из основных машиностроительных дисциплин. Она посвящена изучению наиболее общих вопросов исследования и проектирования механизмов и машин. К этим вопросам относятся:

- изучение строения (структуры) механизмов;
- определение положений механизмов и траекторий, описываемых отдельными точками;
- определение скоростей и ускорений отдельных точек и звеньев механизмов;
- исследование и проектирование различных механизмов;
- определение различных сил, действующих на звенья механизма;
- изучение энергетического баланса машин;
- изучение истинного закона движения машин под действием заданных сил;
- изучение способов регулирования скорости хода машин;
- изучение способов уравнивания сил инерции.

В соответствии с этими вопросами ТММ является наукой, изучающей строение, кинематику и динамику механизмов.

Для решения своих задач ТММ привлекает методы математики, физики, теоретической механики и др.

При современном состоянии развития науки и техники машину и механизм можно определить следующим образом:

- *машиной* называется искусственная система материальных тел, предназначенная для замены физического или умственного труда человека и повышения его производительности;
- *механизмом* называется искусственная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел.

Любой механизм состоит из деталей, отдельно изготовленных частей, одни из которых подвижны, другие неподвижны.

Подвижная деталь или группа деталей, движущаяся как одно целое, называется *подвижным звеном*. На рис. 2.1, *а* показан шатун, представляющий собой подвижное звено, состоящее из нескольких деталей: тела шатуна - корпуса, шатунной крышки, болтов, и т.п. При решении многих задач теории механизмов и машин можно не учитывать конструктивное оформление звена и изображать его упрощенно с помощью условных обозначений, отражающих те размеры, которые определяют движение этого и других звеньев механизма [8].

Например, шатун на рис. 2.1, *а* может быть изображен отрезком прямой, длина которого равна расстоянию между осями *A* и *B* (рис. 2.1, *б*). А вот шатун, показанный на рис. 2.1, *в*, будет изображаться в виде треугольника (рис. 2.1, *г*).

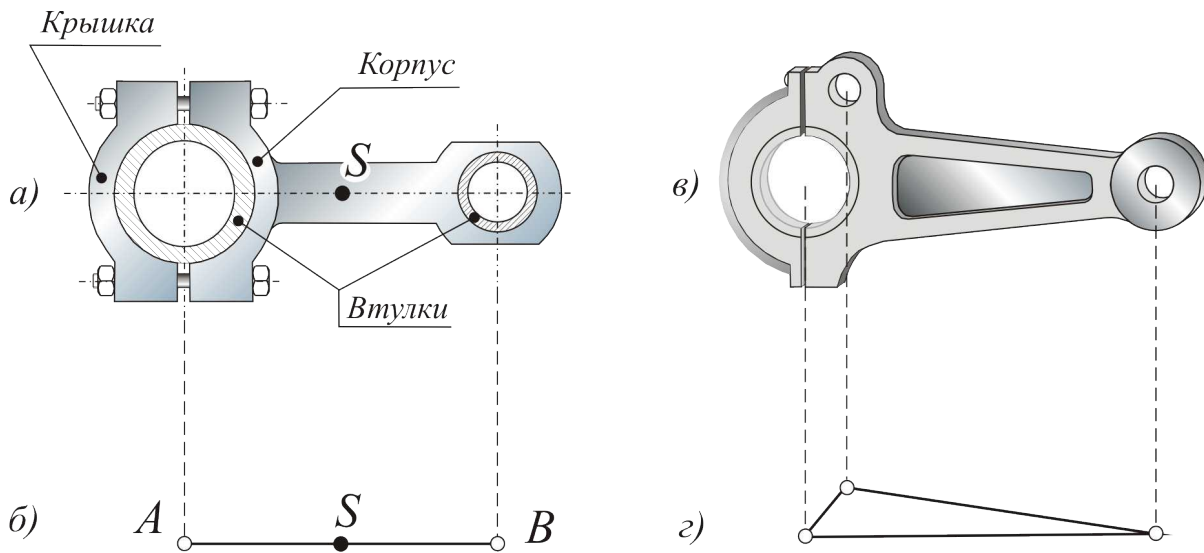


Рис. 2.1. Шатун: а, в) натуральный вид; б, г) условные обозначения

Все неподвижные детали образуют одно звено - *неподвижное звено* или *стойку*. В дальнейшем мы будем обозначать стойку нулевым звеном или θ .

Если рассмотреть кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.2), предназначенный для преобразования вращательного движения кривошипа 1 в поступательное движение ползуна 3 (либо на рис. 2.2 оборот), то это будет четырехзвенный механизм, состоящий из трех подвижных звеньев (1, 2 и 3) и стойки θ .

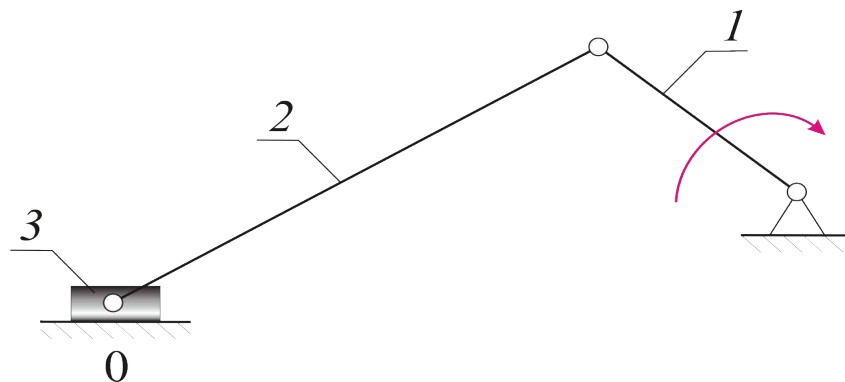


Рис. 2.2. Кривошипно-ползунный механизм

В зависимости от вида движения звена относительно стойки его называют:

- кривошипом*, если звено совершает полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;
- коромыслом*, если звено делает неполный оборот вокруг оси, связанной со стойкой, совершая возвратные вращательные движения;
- шатунном*, если звено соединено с подвижными звеньями и совершает сложное (плоское) движение (звено 2 на рис. 2.2);
- ползуном*, если звено совершает поступательное движение относительно стойки;
- кулисой*, если это звено служит подвижной направляющей для другого звена;

-*каменем кулисы* или *кулисным камнем*, если это звено движется поступательно относительно кулисы (рис. 2.3).

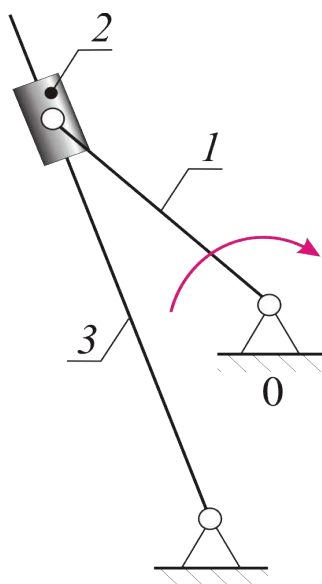


Рис. 2.3. Кулисный механизм: 0 – стойка; 1 -кривошип; 2- кулисный камень; 3 – кулиса-коромысло

Кроме перечисленных выше звеньев, широко распространенных в рычажных механизмах, в различных машинах достаточно часто используют механизмы с зубчатым зацеплением (рис. 2.4), а также кулачковые механизмы.

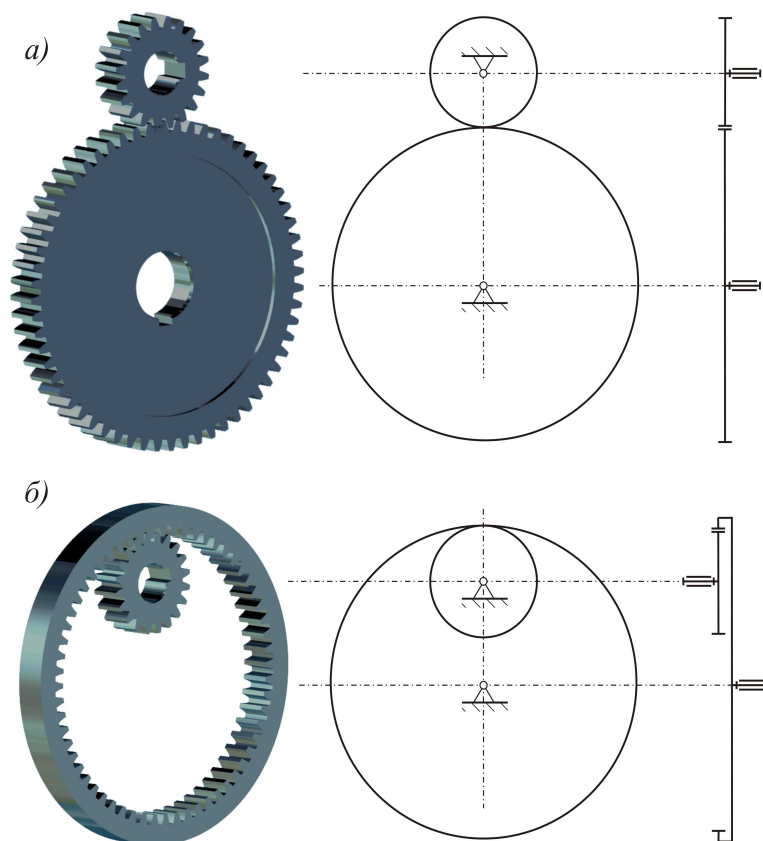


Рис. 2.4. Зацепление зубчатых колёс: а) внешнее зацепление колёс; б) внутреннее зацепление колёс

Зубчатым механизмом называют механизм, в состав которого входят зубчатые колеса, т. е. звенья, имеющие выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с зубьями другого колеса.

Зубчатые колеса изображают условно окружностями, которые при относительном движении колес перекатываются друг по другу без скольжения, т. е. центроидами колес в их относительном движении либо их диаметрами (см. рис. 2.4).

В теории зубчатого зацепления эти окружности называются **начальными окружностями**.

Кулачковым механизмом называют механизм, в состав которого входит кулачок (рис. 2.5).

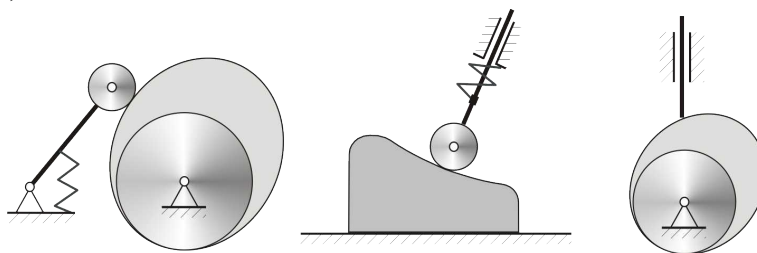


Рис. 2.5. Виды кулачковых механизмов

Кулачком называют звено со сложной формой рабочей поверхности (поверхность переменной кривизны), за счет которой обеспечивается требуемый закон движения выходного звена, (рис. 2.6, звено 1). Выходное звено кулачкового механизма обычно называют **толкателем**.

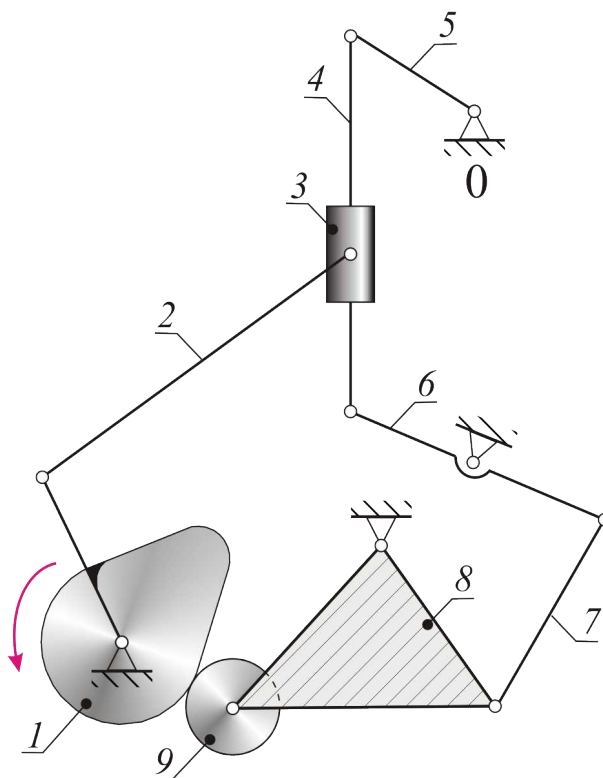


Рис. 2.6. Кинематическая схема механизма: 1- кулачок-кривошип; 2- шатун; 3- кулисный камень; кулиса-шатун; 5-коромысло; 7-шатун; 8- коромысло толкателя; 9 – ролик толкателя

В десятизвенном механизме, показанном на рис. 2.6, девять звеньев подвижны. Укажем вид движения этих звеньев.

Кулачок-кривошип *1* - вращательное движение; шатун *2* - плоское движение; кулисный камень *3* - сложное движение; кулиса-шатун *4* - плоское движение; коромысла *5, 6* - вращательные движения; шатун *7* - плоское движение; коромысло-толкатель *8* - движение вращательное; ролик толкателя *9* - движение сложное вращательное.

Рассмотрим механизм, показанный на рис. 2.7.

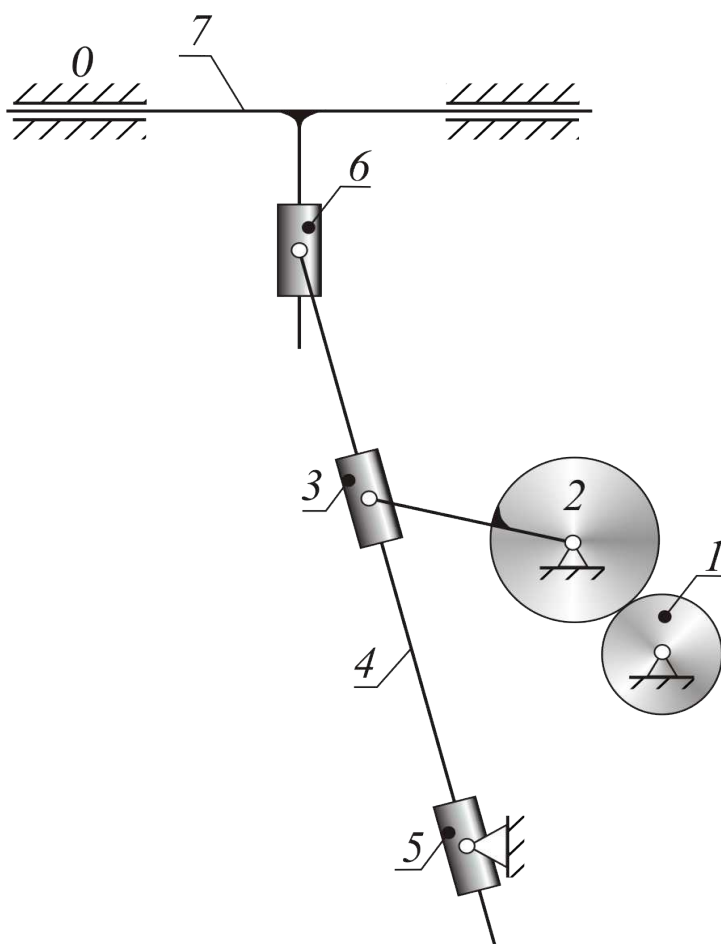


Рис. 2.7. Схема механизма: 0 - стойка; 1- ролик; 2- ролик-кривошип; 3 -кулисный камень; 4- шатун-кулиса; 5- кулисный камень; 6 -кулисный камень; 7 - ползун-кулиса

В данном восьмизвенном механизме семь звеньев подвижны и совершают следующие виды движений: ролик *1*- движение вращательное; ролик-кривошип *2* - движение вращательное; кулисный камень *3* - движение сложное;- шатун-кулиса *4* - движение плоское; кулисный камень *5* - движение вращательное; кулисный камень *6* - движение сложное; ползун-кулиса *7*- движение поступательное.

Иногда возникают затруднения: какое звено в кулисной паре (кулиса - кулисный камень) назвать кулисой, а также - кулисным камнем (например, в кинематической паре 4-5 на рис. 2.7).

В дальнейшем из двух звеньев кулисной пары будем называть кулисой звено, имеющее большие линейные размеры.

2.1.2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПАРА. ЭЛЕМЕНТ ПАРЫ

Любой механизм состоит из стойки и нескольких подвижных звеньев. Причем звенья в механизме соединяются между собой таким образом, что всегда имеется возможность их движения относительно друг друга.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется *кинематической парой*.

Иными словами, два звена, соединенные подвижно, образуют кинематическую пару.

Определим количество кинематических пар, образованных звеньями различных механизмов.

Звенья кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.2) образуют 4 кинематические пары: $0-1$, $1-2$, $2-3$, $3-0$.

Такое же количество кинематических пар имеется в кулиском механизме, показанном на рисунке 2.3: $0-1$, $1-2$, $2-3$, $3-0$.

13 кинематических пар образованы звеньями механизма, показанного на рисунке 2.6: $0-1$, $1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-5$, $5-0$, $4-6$, $6-0$, $6-7$, $7-8$, $8-0$, $8-9$, $9-1$.

Совокупность точек, линий, поверхностей, по которым происходит касание звеньев, образующих кинематическую пару, называется *элементами пары*.

Можно говорить, что кинематическая пара - это совокупность двух элементов, каждый из которых принадлежит одному звену.

При изучении структуры и кинематики механизмов обычно принимают следующие допущения:

- звенья механизма являются абсолютно твердыми телами;
- элементы кинематических пар изготовлены абсолютно точно;
- в кинематических парах отсутствуют зазоры.

Для непрерывного контакта звеньев, образующих кинематическую пару, необходимо обеспечить замыкание кинематической пары.

Различают силовое и геометрическое замыкание кинематической пары.

При силовом замыкании кинематическая пара образуется за счет прижатия одного звена к другому силой тяжести звена либо другой дополнительной силой, например, силой пружины (см. рис.2.5).

Геометрическое замыкание осуществляется за счет соответствующего конструктивного оформления элементов кинематической пары (рис. 2.8, рис. 2.12).

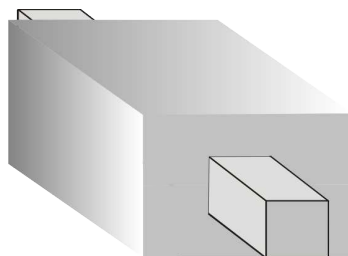


Рис. 2.8. Геометрическое замыкание кинематической пары

В зависимости от количества кинематических пар, в которые входит данное звено, оно может быть:

- одноэлементным или однопарным, если оно входит в одну кинематическую пару (рис. 2.9, а);
- двухэлементным или двухпарным, если оно входит в две кинематические пары (рис. 2.9, б);
- трехэлементным или трехпарным, если оно входит в три кинематические пары (рис. 2.9, в или рис. 2.9, г) и так далее.

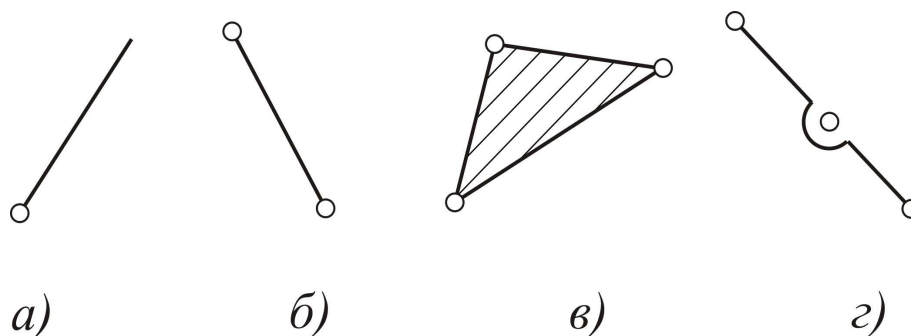


Рис. 2.9. Варианты изображений звеньев: а) одноэлементных; б) двухэлементных; в, г) трехэлементных

Совокупность звеньев, связанных кинематическими парами, называется *кинематической цепью*.

2.1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. МЕХАНИЗМ

Различают кинематические цепи:

- простые и сложные;
- замкнутые (закрытые) и незамкнутые (открытые);
- плоские и пространственные.

Кинематическая цепь называется *простой*, если каждое ее звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 2.10, а, рис. 2.2, рис. 2.3).

Кинематическая цепь называется *сложной*, если в ее составе имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары (рис. 2.10, б, рис. 2.7 - звено 4 - трехэлементное).

Замкнутой называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит по крайней мере в две кинематические пары (рис. 2.10, а, рис. 2.2, рис. 2.3).

Незамкнутой, или *открытой*, кинематической цепью называется кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее только в одну кинематическую пару (рис. 2.10, б).

Кинематическая цепь называется *плоской*, если все ее звенья движутся в параллельных плоскостях, в противном случае кинематическая цепь будет *пространственной*.

Звено или звенья, движения которых заданы, называются *входными*.

Звено, совершающее требуемое движение, для реализации которого был создан механизм, называется *выходным*.

Применяют также термины ведущее и ведомое звено.

Звено, к которому приложены движущие силы, называется *ведущим*.

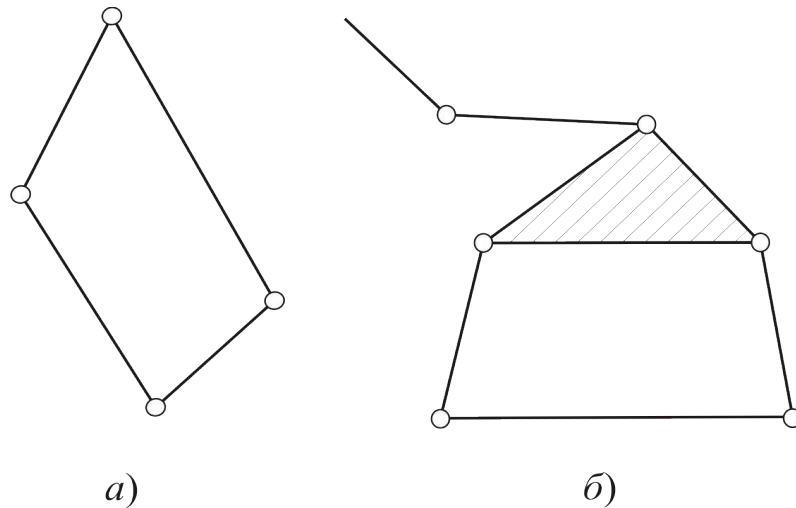


Рис. 2.10. Кинематические цепи: а) простая, замкнутая; б) сложная, открытая

Звено, к которому приложены силы полезного или производственного сопротивления, называется *ведомым*.

2.1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Кинематические пары принято классифицировать по следующим признакам:

- по характеру относительного движения звеньев;
- по характеру соприкосновения звеньев;
- по числу ограничений (условий связи), налагаемых на относительное движение звеньев.

По характеру относительного движения звеньев кинематические пары делятся на *плоские* и *пространственные*.

Кинематическая пара называется *плоской*, если звенья, образующие пару, перемещаются в параллельных плоскостях, в противном случае кинематическая пара будет *пространственной*.

Так, вращательная пара, показанная на рис. 2.11, а, является плоской кинематической парой, а сферическая пара или шаровой шарнир (рис. 2.11, б) относится к пространственным кинематическим парам.

(Стрелками показаны возможные перемещения одного звена относительно другого).

По характеру соприкосновения звеньев кинематические пары делятся на *низшие* и *высшие*.

Кинематическая пара называется *низшей*, если соприкосновение звеньев происходит по поверхности.

При этом рассматриваются идеальные кинематические пары, т.е. без наличия зазоров.

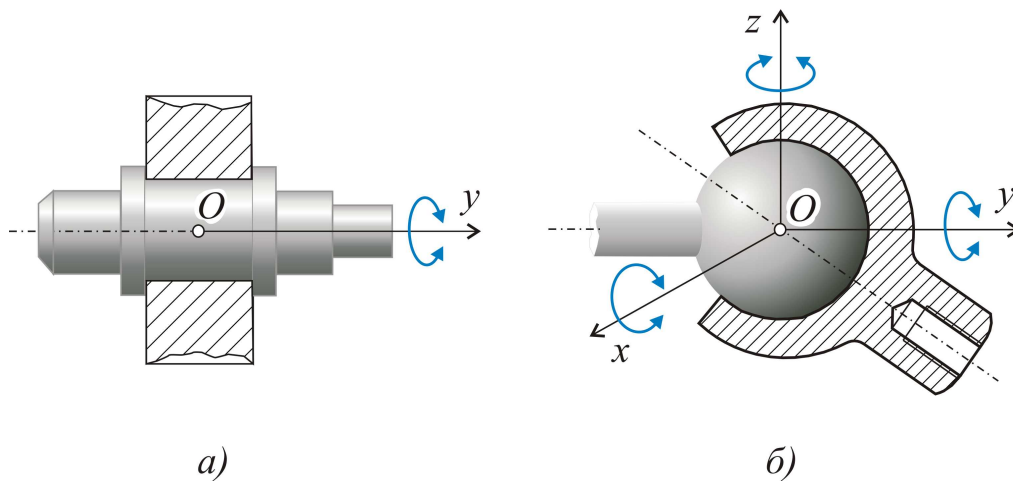


Рис. 2.11. Кинематические пары: а) плоская кинематическая пара; б) пространственная кинематическая пара

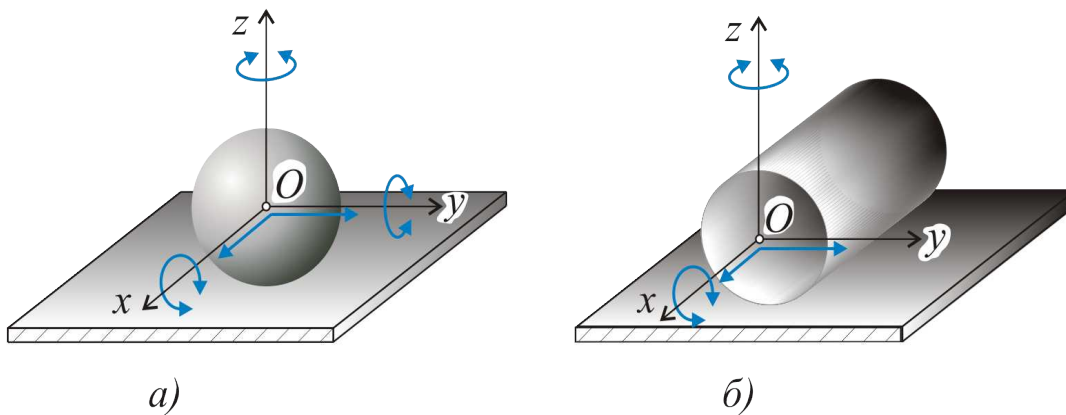


Рис. 2.12. Кинематические пары: а) шар-плоскость; б) цилиндр - плоскость

Кинематическая пара называется *высшей*, если звенья, образующие пару, соприкасаются в точке или по линии.

По количеству ограничений или условий связи, налагаемых на относительное движение звеньев, различают кинематические пары пяти классов. При этом номер класса пары совпадает с числом условий связи, наложенных на относительное движение звеньев, и может быть подсчитан по формуле

$$S = 6 - H, \tag{2.1}$$

где H - *число степеней свободы* кинематической цепи, представляющее число независимых параметров (обобщенных координат), однозначно определяющих положение данной цепи; S - число условий связи, номер класса пары.

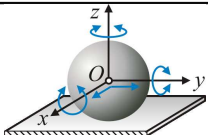

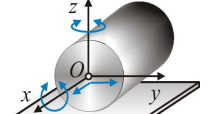

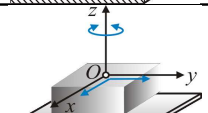
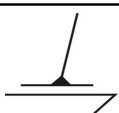
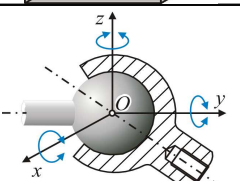

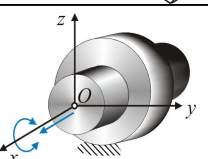

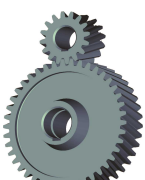
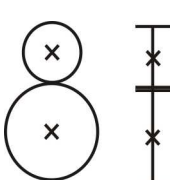
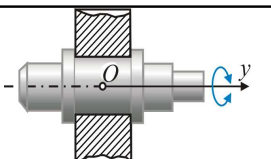
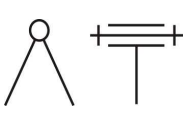
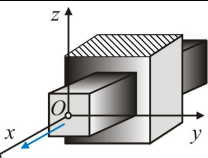
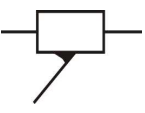
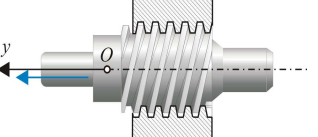
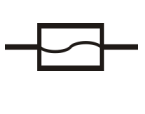
Число H можно легко подсчитать, имея в виду, что свободное тело в пространстве обладает шестью степенями свободы и его движение может быть представлено в виде трех поступательных и трех вращательных движений

относительно координатных осей x, y, z .

В данном пособии используем классификацию кинематических пар по классам. В табл. 2.1 приведена классификация некоторых кинематических пар и показаны их условные обозначения.

Таблица 2.1

Классификация кинематических пар по классам

Название пары	Рисунок	Условное изображение	Число степеней свободы	Число условий связи, класс пары
Шар-плоскость			5	I
Цилиндр-плоскость			4	II
Плоскостная			3	III
Сферическая			3	III
Цилиндрическая			2	IV
Внешнее зубчатое зацепление цилиндрических колес			2	IV
Вращательная			1	V
Поступательная			1	V
Винтовая			1	V

Например, в кинематической паре «шар-плоскость», см. табл. 2.1, шар обладает пятью степенями свободы в относительном движении.

Следовательно, $S=6-5=1$, т.е. эта пара является парой первого класса.

Кинематическая пара «цилиндр-плоскость» будет парой второго класса, т.к. $S=6-4=2$.

2.1.5. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА МЕХАНИЗМА

Механизм можно изобразить техническим чертежом, полуконструктивной, кинематической и структурной схемами.

Чтобы изучить движение звеньев механизма, необходимо знать не только количество звеньев, число и виды кинематических пар, но и те параметры, которые влияют на движение звеньев: расстояние между осями кинематических пар, взаимное расположение осей и направляющих, числа зубьев колес и так далее. Все это показывают на кинематической схеме механизма.

Кинематической схемой механизма называют такую схему, на которой в масштабе с помощью условных обозначений показывают все те параметры механизма, которые влияют на движение его звеньев.

Для изучения строения (структуры) механизма обычно вычерчивают его структурную схему.

Структурной схемой называют такую схему механизма, на которой с помощью условных обозначений показывают последовательность соединения звеньев, число и виды кинематических пар. Структурная схема вычерчивается без учета геометрических размеров звеньев механизма и часто отличается от его кинематической схемы тем, что она выполнена без соблюдения масштабов длин звеньев. Этот способ изображения структурной схемы механизма не является единственным: в зависимости от решаемой задачи структурная схема может быть представлена, например, в виде буквенного выражения, отражающего последовательность соединения кинематических пар и их виды.

Как уже было сказано выше, при вычерчивании кинематических схем механизмов применяют условные изображения звеньев и кинематических пар.

Если звено входит в две вращательные пары, то его условно изображают отрезком AB прямой линии с двумя кружками на концах независимо от фактической конфигурации этого звена (рис. 2.13).

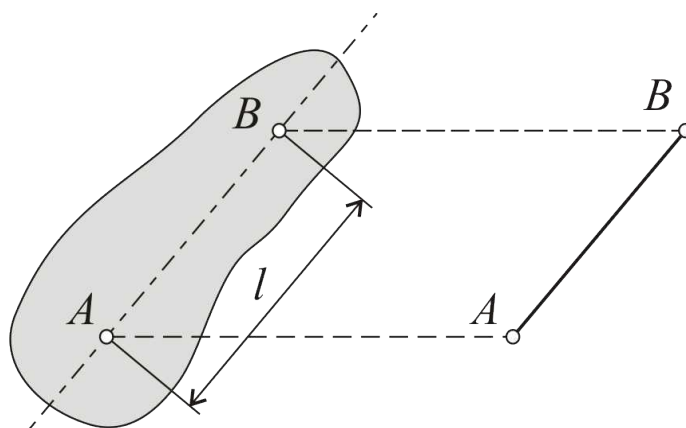


Рис. 2.13. Условное изображение звена

Основным размером такого звена считается расстояние l между точками A и B . Аналогичная методика используется при изображении более сложных звеньев.

На рис. 2.14 показаны два способа изображения трехшарнирного (трехэлементного) звена.

При изображении поступательных пар основными параметрами являются угол α , определяющий положение неподвижной направляющей, и плечо h между центром вращательной пары и направляющей (рис. 2.15).

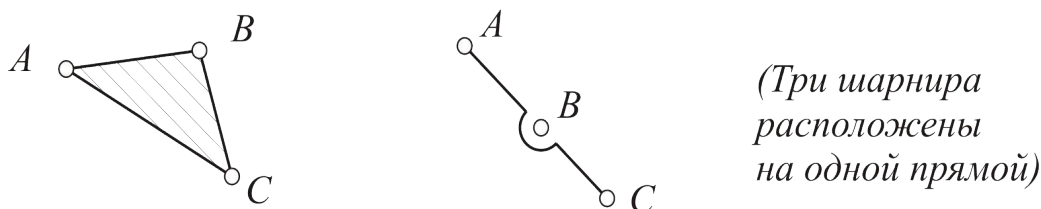


Рис. 2.14. Условные изображения трёхшарнирного звена

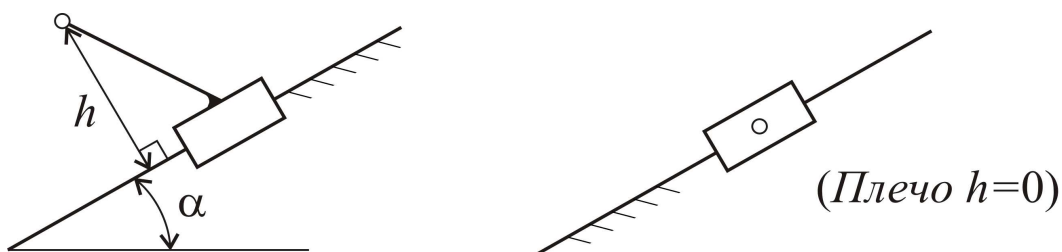


Рис. 2.15. Условные изображения поступательных пар

На рис. 2.16 - 2.17 показаны различные способы условного изображения наиболее встречающихся в различных механизмах вращательных (рис. 2.16) и поступательных (рис. 2.17) пар.

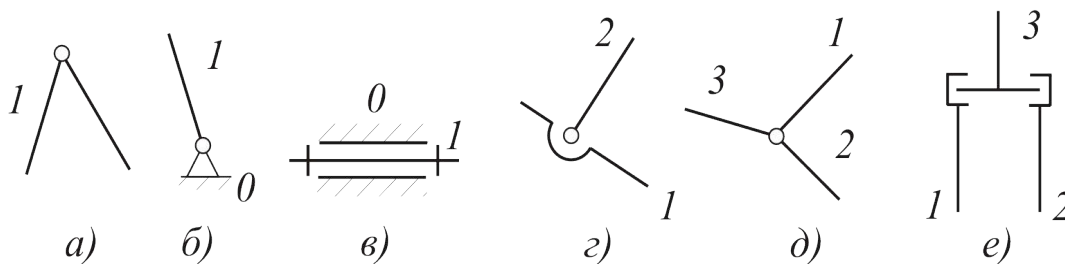


Рис. 2.16. Условные изображения вращательных кинематических пар

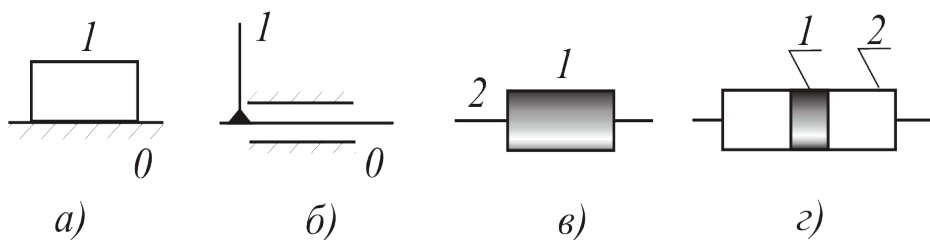


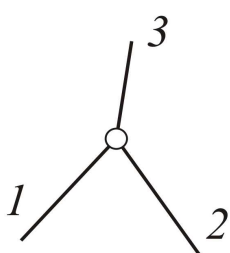
Рис. 2.17. Условные изображения поступательных кинематических пар

Неподвижное звено обозначается штриховкой.

Вращательную пару часто называют *шарниром*. Если вращательная пара расположена в средней части звена (рис. 2.16, *з*), то около кружка, обозначающего пару, вычерчивается дуга, показывающая, что в шарнире соединено только два звена.

Если шарнир соединяет более двух звеньев (рис. 2.16, *д*), то он называется *кратным*. При этом кратность шарнира, т.е. число образованных кинематических пар, равна числу соединяемых звеньев минус единица.

На рисунке 2.16, *д*, *е* изображен двойной шарнир. Звенья 1, 2 и 3 образуют две кинематические пары 1-3 и 2-3. Если двойной шарнир показан только видом (рис. 2.18), то при подсчете количества кинематических пар в этом соединении достаточно указать любые две пары: 1-2 и 1-3 или 1-2 и 2-3.



При решении различных инженерных задач приходится использовать размеры, измеряемые на кинематических схемах исследуемых механизмов. Введем понятие вычислительного масштаба длины μ_l , имеющего размерность $м/мм$.

Вычислительным масштабом длины называют число μ_l , показывающее, сколько метров истинной длины содержится в одном миллиметре чертежа.

Рис. 2.18

Двойной шарнир

Если чертежный масштаб $M 1:t$, то ему соответствует вычислительный масштаб длины

$$\mu_l = 0,001 \cdot t \frac{м}{мм}. \quad (2.2)$$

Например, если $M 1:2$, то $\mu_l = 0,001 \cdot 2 = 0,002 \frac{м}{мм}$;

если $M 4:1$, то $\mu_l = 0,001 \cdot \frac{1}{4} = 0,00025 \frac{м}{мм}$.

Пусть l_{OA} - истинная длина звена OA в метрах,

OA - отрезок в $мм$, изображающий звено OA на чертеже.

Тогда

$$l_{OA} = OA \cdot \mu_l, м. \quad (2.3)$$

2.1.6. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Под *структурным анализом механизма* понимают определение степени подвижности механизма; разложение его на структурные группы и входные звенья; определение класса и порядка групп, а также класса и порядка всего механизма. Структурный анализ производится для удобства выполнения кинематического и силового расчета механизма.

Число степеней свободы H кинематической цепи зависит от количества звеньев, входящих в эту цепь, от числа и вида образованных этими звеньями кинематических пар.

Число степеней свободы кинематической цепи, состоящей из k звеньев, p_5 пар V класса, p_4 пар VI класса, p_3 пар III класса, p_2 пар II класса и p_1 пар I класса определяется формулой:

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2.4)$$

Степенью подвижности W кинематической цепи называют число ее степеней свободы относительно звена, принятого за стойку.

Так как неподвижное звено отнимает шесть степеней свободы, то

$$W = H - 6 = 6 \cdot (k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

или

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (2.5)$$

где n - число подвижных звеньев кинематической цепи.

Равенства типа (2.5), связывающие степень подвижности кинематической цепи с количеством звеньев, а также с числом и видом кинематических пар, называют *структурными формулами*.

Формула (2.5) называется структурной формулой Сомова-Малышева.

Для плоских механизмов степень подвижности будет определяться по формуле

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (2.6)$$

Эта формула получена знаменитым русским ученым П.Л. Чебышевым и называется *структурной формулой Чебышева*.

2.1.7. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Основы структурной классификации применительно к плоским рычажным механизмам были разработаны русским ученым Л.В. Ассуром, дополнены и развиты И.И. Артоболевским, Н.Г. Бруевичем, В.В. Добровольским и др.

В основу классификации механизмов положен *принцип образования механизмов*, заключающийся в следующем:

любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения (наслоения) к начальному звену и стойке кинематических цепей, называемых структурными группами (группами Ассура).

Структурной группой, или группой Ассура, называют открытую кинематическую цепь, которая после присоединения ее свободными элементами к стойке обладает нулевой подвижностью и не распадается на более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию.

Для плоских кинематических цепей пары IV класса могут быть заменены на пары V класса (вращательные и поступательные), и тогда структурная формула будет:

$$W_{cp} = 3n - 2p_5 = 0,$$

или

$$3n - 2p_5 = 0.$$

В группе Ассура число пар V класса должно быть в $3/2$ раза больше числа n – подвижных звеньев.

Сочетание кинематических пар и числа звеньев в группах будет следующим:

Таблица 2.2

К классификации механизмов

n	2	4	6	8
p_5	3	6	9	12

Простейшей группой будет сочетание двух подвижных звеньев и трех кинематических пар V класса ($n=2, P_5=3$), эта группа получила название двухповодковой группы II класса 2 порядка.

Номер класса группы определяется числом кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур.

Порядок группы определяется количеством ее свободных элементов, т.е. числом ее мест присоединения.

Модификация групп II класса 2 порядка

Существует 5 видов двухповодковых групп (рис. 2.19).

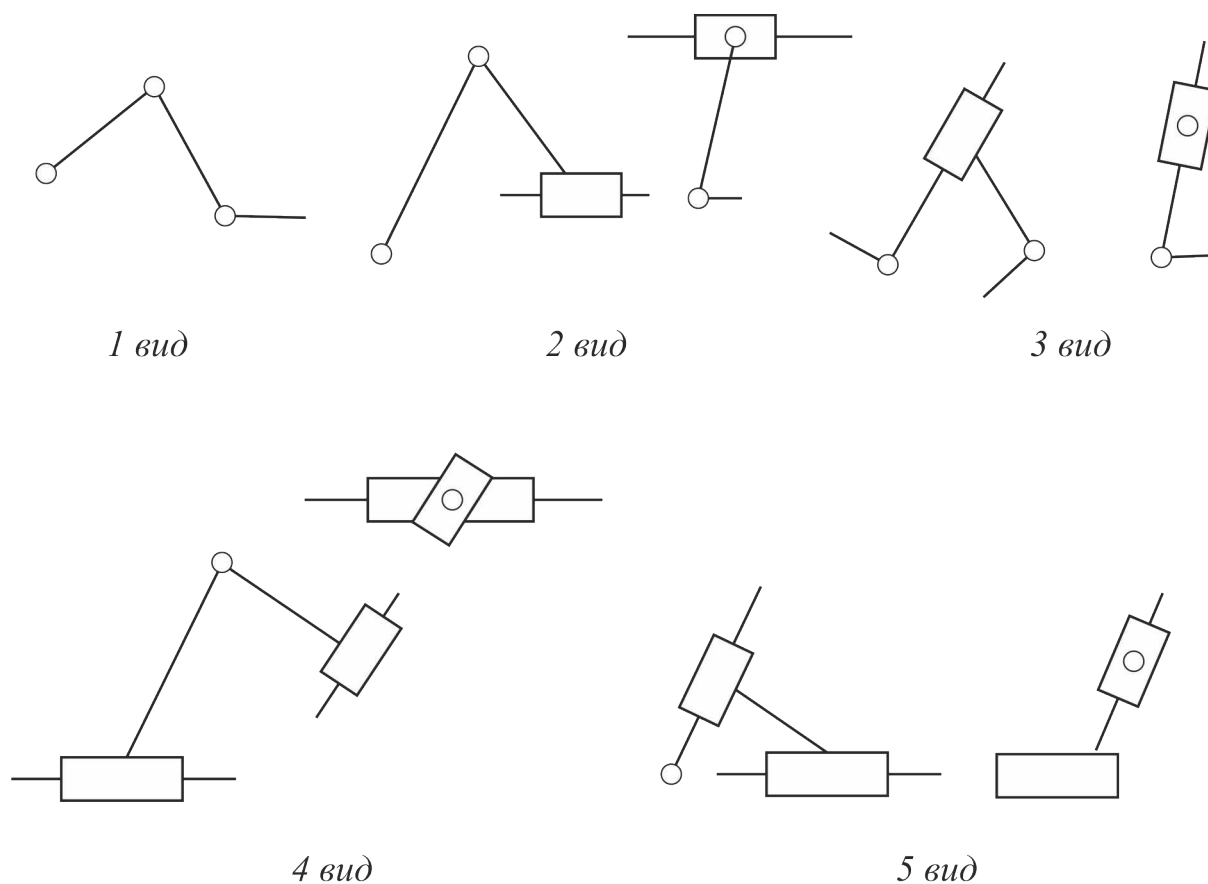
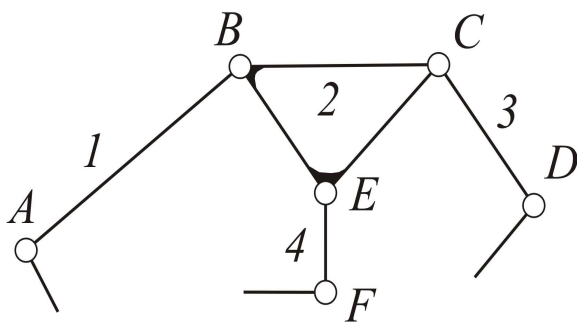
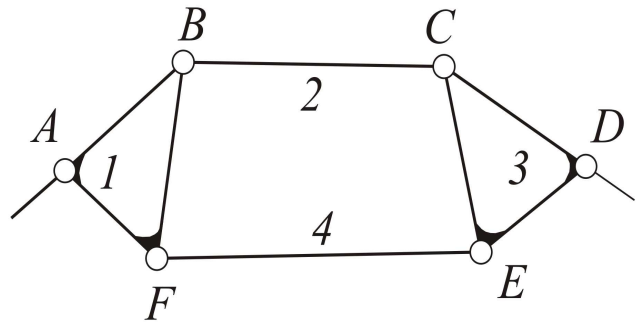


Рис. 2.19. Виды двухповодковых групп

Более сложные группы показаны на рис 2.20.



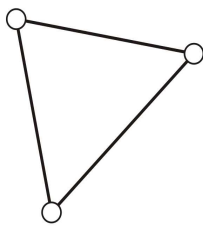
*B, C, D - внутренние пары
III класса 3 порядка
($n=4; P_5=6$)*



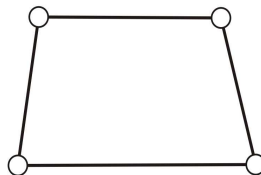
*B, C, D, F - внутренние пары
IV класса 2 порядка
($n=4; P_5=6$)*

Рис. 2.20. Группы III и IV класса

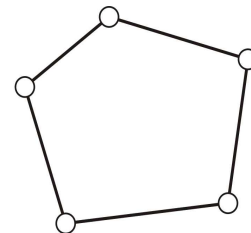
Класс группы Ассур выше второго определяется числом внутренних кинематических пар, образующих так называемый исходный контур (рис. 2.21).



*Контур групп
III класса*



*Контур групп
IV класса*



*Контур групп
V класса*

Рис. 2.21. Контур группы Ассур

Из приведенного выше следует:

- а) класс группы Ассур определяется классом наивысшего замкнутого контура;
- б) порядок группы Ассур определяется числом свободных поводков, при помощи которых она присоединяется к звеньям механизма;
- в) класс и порядок механизма определяются классом и порядком наиболее сложной группы, входящей в этот механизм.

Входное звено с одной кинематической парой.

Входное звено с одной кинематической парой, вращательное или поступательное, называется *начальным механизмом* или *механизмом I класса* (рис. 2.22). Большинство плоских рычажных механизмов, нашедших распространение в машиностроении, относится к механизмам, включающим в себя структурные группы II класса 2-го порядка, реже – группы более высоких классов.

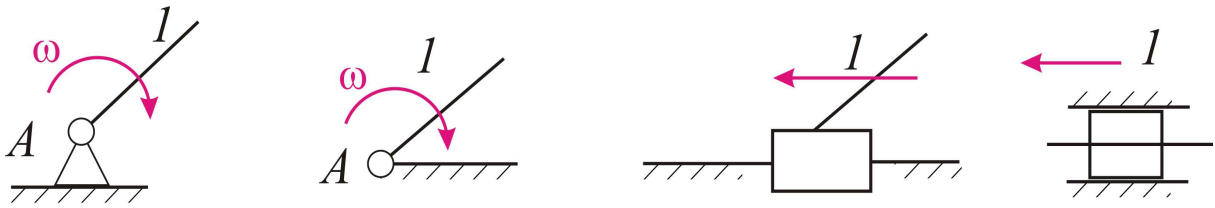


Рис. 2.22. Начальные механизмы

Последовательность структурного анализа механизмов:

1. Удалить из кинематической схемы механизма избыточные (пассивные) связи;
2. Построить структурную схему механизма, строго соблюдая последовательность соединения звеньев;
3. Если степень подвижности механизма $W=1$, то выделяют на структурной схеме один механизм I -го класса или начальный механизм (кривошип, соединенный со стойкой), обводя его замкнутым контуром (при $W=k$ необходимо выделить k начальных механизмов);
4. Разложить полученную кинематическую цепь на структурные группы, обводя их замкнутым контуром;
5. Записать формулу строения механизма и определить класс и порядок механизма, который определяется классом и порядком наиболее сложной группы, входящей в этот механизм.

Пример 2.1

Произвести структурный анализ механизма газораспределения двигателя внутреннего сгорания (рис. 2.23).

Сначала определим степень подвижности механизма:

где $n=4$ – число подвижных звеньев; $p_{5ep.}=3$ – вращательные пары (A, C, D); $p_{5nocm.}=1$ – поступательная пара (F); $p_4=2$ – высшие пары (B и E).

$$W=3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2(?)$$

Если $W=2$, должно быть два входных звена, на самом же деле достаточно одного вращения кулачка (I). Это несоответствие вызвано наличием шарнира C – лишней степенью свободы. Не будь пары C, характер движения звена 3 не изменился бы, поэтому надо считать $W=1$, а не 2 (число подвижных звеньев в этом случае считать не 4, а 3 и $p_5=3$).

Произведем замену высших пар IV класса на пары V класса и построим заменяющий механизм (рис. 2.24). Определим степень подвижности заменяющего механизма:

$$W=3n - 2p_5,$$

где $n=5$; $p_{5ep.}=5$; $p_{5nocm.}=2$; $p_4=0$.

$$W=3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

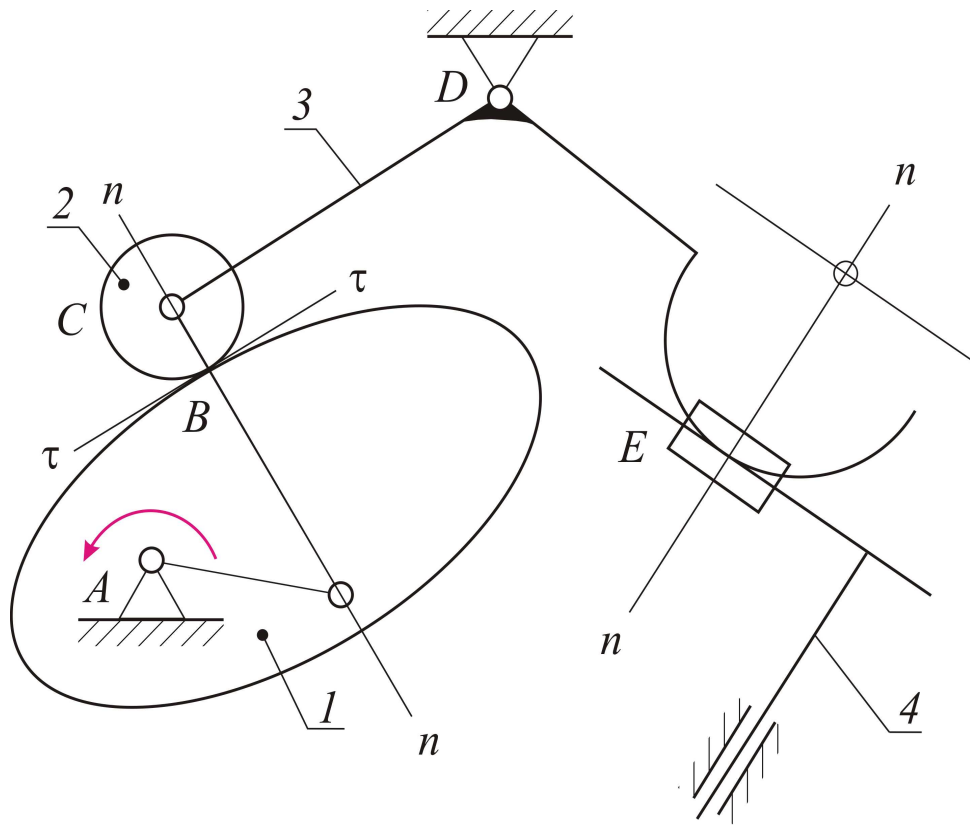


Рис. 2.23. Схема механизма газораспределения (пример 2.1)

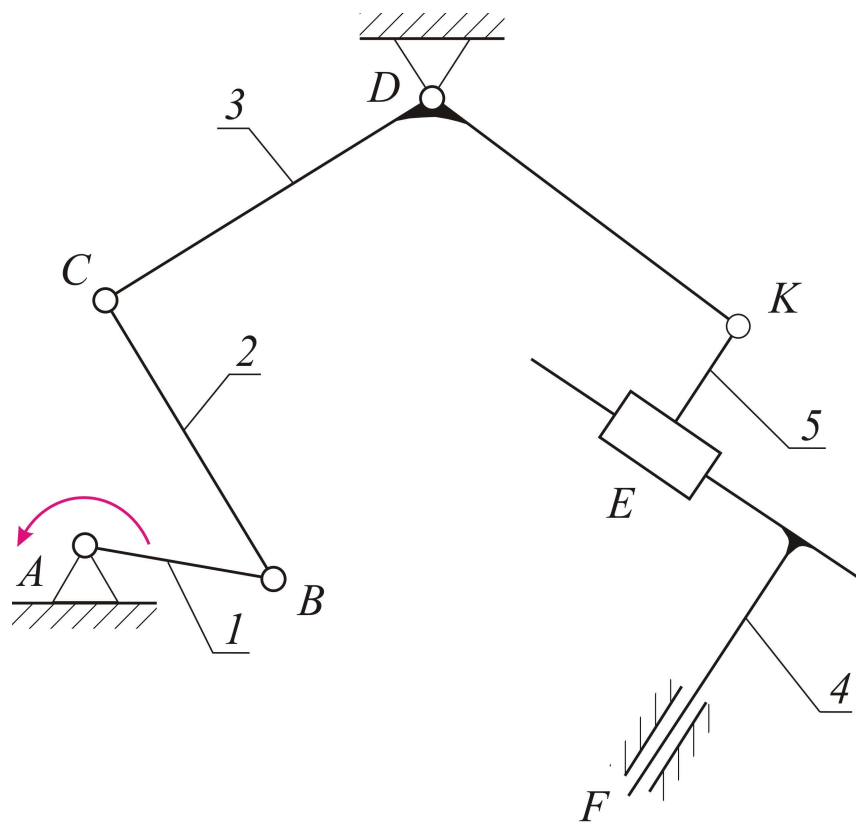


Рис. 2.24. Заменяющий механизм

2.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

2.2.1. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

При анализе кинематических параметров системы применимы уже изученные нами законы и методы кинематики.

Задачами кинематического анализа являются: положения всех звеньев или их точек в пространстве; скорости точек звеньев и угловые скорости звеньев; ускорения точек звеньев и угловые ускорения звеньев.

Все эти параметры определяются векторными величинами, т.е. математическое описание осуществляется векторными соотношениями, в результате решения которых могут быть получены требуемые параметры.

Существуют такие методы кинематического анализа:

- ✓ аналитический;
- ✓ векторно-графический;
- ✓ графический;
- ✓ экспериментальный.

Кинематический анализ плоского рычажного механизма включает в себя:

- выбор, назначение и использование масштабов скоростей и ускорений;
- построение плана скоростей и чтение его;
- определение величины и направление линейной скорости любой точки механизма по плану скоростей;
- определение величины и направление угловой скорости любого звена механизма;
- построение плана ускорения;
- определение величины и направления абсолютного, нормального и касательного ускорения любой точки механизма по плану ускорений;
- определение величины и направления углового ускорения любого звена механизма по плану ускорений.

В данном пособии рассматривается векторно-графический метод (метод планов и ускорений).

2.2.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЁХЗВЕННИКА

Рассмотрим схему шарнирного четырёхзвенника (рис. 2.25, а).

Исходными данными для кинематического анализа являются:

- геометрическая схема механизма;
- угловая скорость начального звена $\omega_1 = const, c^{-1}$;
- угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0, c^{-2}$.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0; 1) \rightarrow II(2; 3). \quad (2.7)$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \quad (2.8)$$

Кинематический анализ приводим в соответствии с формулой строения механизма.

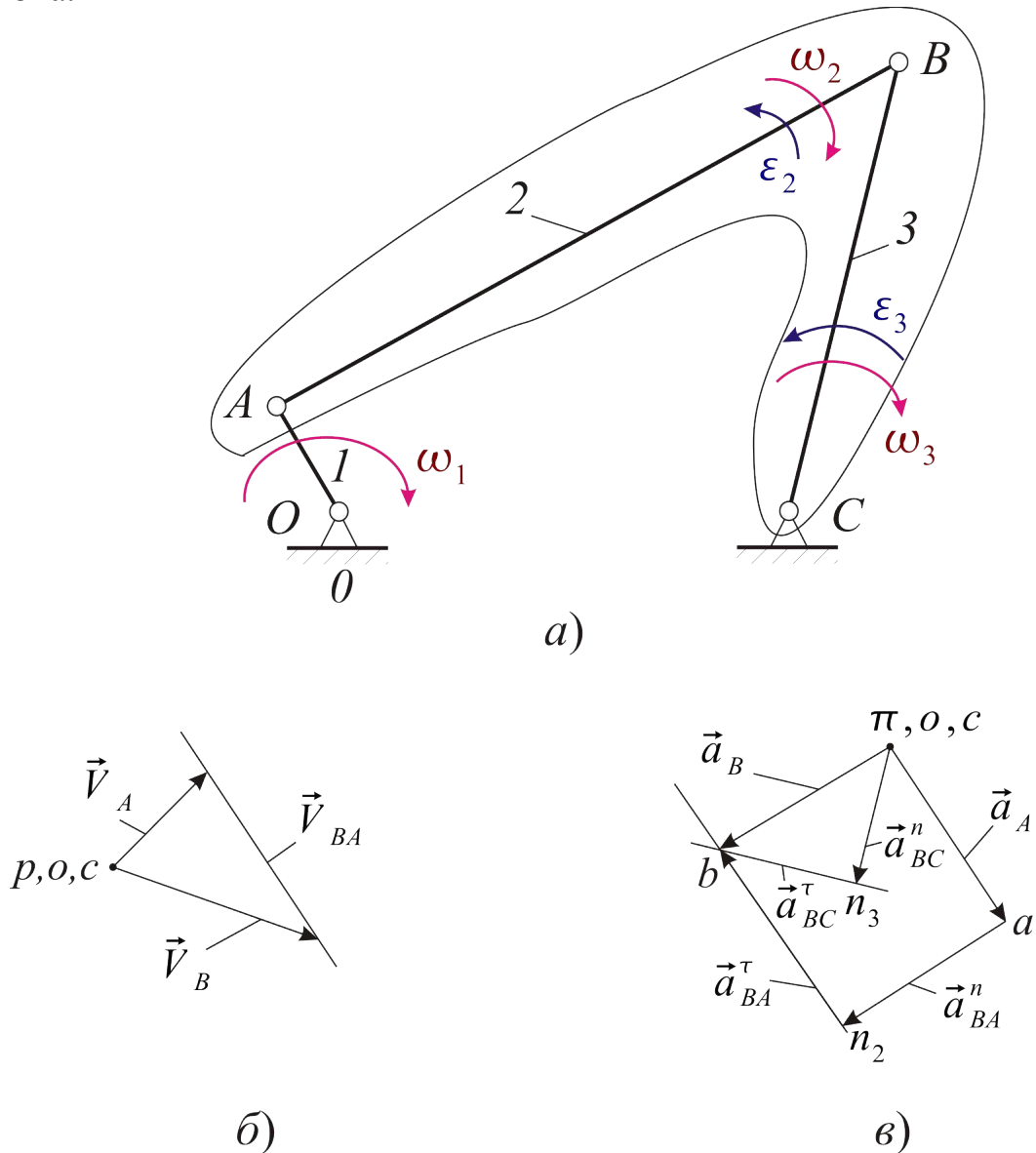


Рис. 2.25. Механизм шарнирного четырёхзвенника: а) кинематическая схема (0- стойка, 1-кривошип, 2- шатун, 3-коромысло); б) план скоростей; в) план ускорений

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена $I(0;1)$. Определим скорость точки A из выражения:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}, \frac{M}{c}. \quad (2.9)$$

Вектор скорости \vec{V}_A направлен перпендикулярно к звену OA в

сторону вращения кривошипа 1.

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов скоростей μ_V из отношения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_A}{pa}, \frac{м/с}{мм}, \quad (2.10)$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей, рис. 2.25, б. Откладываем вектор скорости точки A (\vec{pa}) в выбранном масштабе μ_V .

Расчёт группы II(2;3).

Для определения скорости точки B составим систему векторных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC} \end{cases} \quad (2.11)$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.11). Скорость точки A (\vec{V}_A) определена ранее. Относительная скорость (\vec{V}_{BA}) направлена перпендикулярно звену 2, и поэтому на плане скоростей (рис. 2.25, б) из точки b отложим прямую перпендикулярно звену 2.

Рассмотрим вторую часть системы (2.11). Так как скорость точки C равна нулю, помещаем её в полюс плана скоростей (рис. 2.25, б, точка c). Из этой точки C откладываем вектор относительной скорости \vec{V}_{BC} , перпендикулярный звену 3.

На пересечении относительных скоростей \vec{V}_{BA} и \vec{V}_{BC} получаем точку b (рис. 2.25, б), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор \vec{pb} . Для получения величины скорости точки B используем выражение:

$$V_B = pb \cdot \mu_V, \frac{м}{с}. \quad (2.12)$$

Определим величины и направления угловых скоростей звеньев 2 и 3, используем выражения:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} = \frac{ba \cdot \mu_V}{l_{BA}}, c^{-1}. \quad (2.13)$$

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} = \frac{bc \cdot \mu_V}{l_{BC}}, c^{-1}. \quad (2.14)$$

Для определения направлений ω_2 и ω_3 необходимо перенести векторы относительных скоростей \vec{V}_{BA} и \vec{V}_{BC} , изображённых на планах

скоростей (рис. 2.25, б, \vec{ab} и \vec{cb}), в точку B , и стрелки этих векторов покажут направление ω_2 и ω_3 .

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I(0; 1)$.

Определим ускорение точки A из выражения:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \quad \frac{M}{c^2}. \quad (2.15)$$

Данные ускорения направлены к центру вращения кривошипа I .

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_A}{\pi a}, \quad \frac{m/c^2}{mm}, \quad (2.16)$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса планов ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A(\pi a)$ в выбранном масштабе μ_a (рис. 2.25, в).

Расчёт группы $II(2; 3)$.

Для определения ускорения точки B составим систему векторных уравнений

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n = \vec{a}_{BA}^\tau \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n = \vec{a}_{BC}^\tau \end{cases}. \quad (2.17)$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.17). Ускорение точки $A - \vec{a}_A$, определено ранее. Нормальное ускорение \vec{a}_{BA}^n определим из выражения:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BA}, \quad \frac{M}{c^2}. \quad (2.18)$$

Направлено это ускорение от точки B к A .

Вектор $a\vec{n}_2$ откладываем на плане ускорений от точки a в направлении от B к A (см. рис. 2.25, в). Вектор ускорения \vec{a}_{BA}^τ направлен перпендикулярно к звену 2, который откладываем от точки n_2 .

Рассмотрим вторую часть системы (2.17).

Ускорение плана C равно нулю. Помещаем её в полюс плана ускорений (см. рис. 2.25, в, точка c). Из этой точки откладываем вектор нормального ускорения \vec{a}_{BC}^n , который определяется из выражения:

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}, \frac{M}{c^2}. \quad (2.19)$$

Направлено это ускорение от B к C . Величина a_{BC}^n определяется из выражения:

$$cn_3 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}, \text{ мм}. \quad (2.20)$$

Вектор \vec{a}_{BC}^n откладываем на плане ускорений от точки c (cn_3 , см. рис. 2.25, в). Вектор \vec{a}_{BC}^τ направлен перпендикулярно звену 3, который откладывается от точки n_3 .

На пересечении линий \vec{a}_{BA}^τ и \vec{a}_{BC}^τ получаем искомую точку b , которую соединяем с полюсом π и получаем вектор $\vec{\pi b}$.

Истинное значение ускорения точки B равно:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}. \quad (2.21)$$

Для определения величины угловых ускорений используем выражения:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{BA}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{l_{BA}}, c^{-2}. \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{BC}} = \frac{n_3 b \cdot \mu_a}{l_{BC}}, c^{-2}. \quad (2.23)$$

Для определения направлений ε_2 и ε_3 необходимо перенести векторы тангенциальных ускорений \vec{a}_{BA}^τ и \vec{a}_{BC}^τ , изображённых на плане ускорений (см. рис. 2.25, в), в точку B , и стрелки этих векторов покажут направления угловых ускорений ε_2 и ε_3 .

2.2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА

Рассмотрим схему кривошипно-шатунного механизма (рис. 2.26). Исходными данными для кинематического анализа являются:

- ✓ геометрическая схема механизма;
- ✓ угловая скорость начального звена $\omega_1 = const, c^{-1}$;
- ✓ угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0$.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0; 1) \rightarrow II(2; 3). \quad (2.24)$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \quad (2.25)$$

Кинематический анализ проводим в соответствии с формулой строения механизма.

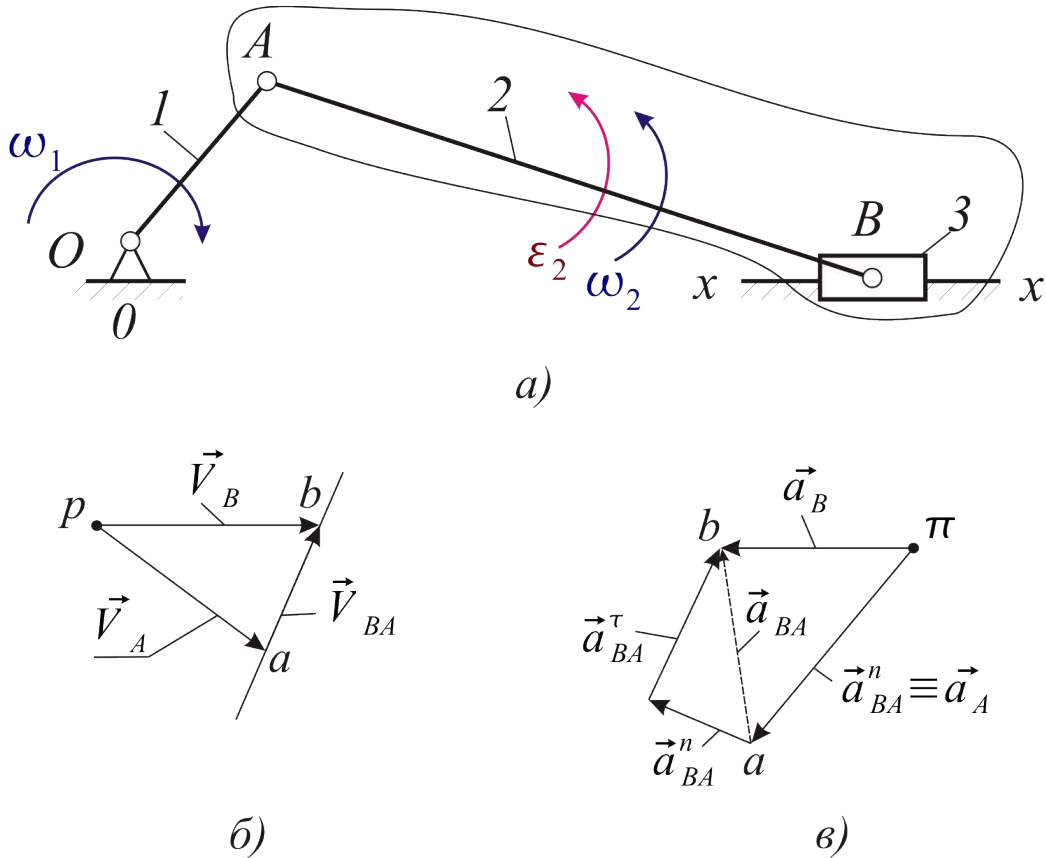


Рис. 2.26. Кривошипно-ползунный механизм: а) кинематическая схема: 0 - стойка, 1 - кривошип, 2 - шатун, 3 - ползун; б) план скоростей; в) план ускорений

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена $I(0; 1)$.

Определим скорость точки A из выражения:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{oA}, \quad \frac{M}{c}. \quad (2.26)$$

Данная скорость \vec{V}_A направлена перпендикулярна к звену OA в сторону вращения кривошипа I .

Выбираем масштабный коэффициент μ_V для построения планов скоростей из выражения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_A}{pa}, \quad \frac{M/c}{\text{мм}}, \quad (2.27)$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей (см. рис. 2.26, б).

Откладываем вектор скорости точки $A(\vec{p}a)$ в выбранном масштабе μ_V .

Расчёт группы $II(2; 3)$.

Для определения скорости точки B составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ V_B \rightarrow (x-x) \end{cases} \quad (2.28)$$

Данную систему решаем графически.

Рассмотрим первую часть системы (2.28). Скорость точки $A(V_A)$ определена ранее. Относительная скорость \vec{V}_{BA} направлена перпендикулярно звену 2, и поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.26, б) из точки b отложим прямую, перпендикулярно звену 2.

Рассмотрим вторую часть системы (2.28). Движение точки B ограничено направляющей $(x-x)$, поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.26, б) через полюс проводим горизонтальную прямую, соответствующую направлению $(x-x)$.

На пересечении относительной скорости V_{BA} и $(x-x)$ получаем точку b (см. рис. 2.26, б), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор \vec{pb} . Для получения величины скорости точки B используем выражение:

$$\vec{V}_B = pb \cdot \mu_V, \text{ мм.} \quad (2.29)$$

Определим величину угловой скорости звена 2, используя выражение:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} = \frac{pb \cdot \mu_V}{l_{BA}}, \text{ с}^{-1}. \quad (2.30)$$

Для определения направления ω_2 необходимо перенести вектор относительной скорости \vec{V}_{BA} , изображённого на плане скоростей (см. рис. 2.26, б, \vec{ab}), в точку B , и стрелка этого вектора показывает направление ω_2 .

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I(0; 1)$.

Определим ускорение точки A из выражения:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \frac{M}{c^2}. \quad (2.31)$$

Данное ускорение направлено к центру вращения кривошипа l от A к O (см. рис. 2.26, a).

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_A}{\pi a}, \frac{m/c^2}{mm}. \quad (2.32)$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A(\pi \vec{a})$ в выбранном масштабе μ_a (см. рис. 2.26, b).

Расчёт группы $II(2; 3)$.

Для определения ускорения точки B составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \\ \vec{a}_B \rightarrow (x-x) \end{cases}. \quad (2.33)$$

Данную систему решаем графически.

Рассмотрим первую часть системы (2.33). Ускорение точки A определено ранее. Нормальное ускорение a_{BA}^n определим из выражения:

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot l_{BA}, \frac{m}{c}. \quad (2.34)$$

Направлено это ускорение от точки B к A .

Величина an_2 , изображаемая на плане ускорений (см. рис. 2.26, b) равна:

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}, mm. \quad (2.35)$$

Вектор $a\vec{n}_2$ откладываем на плане ускорений от точки a (см. рис. 2.26, b) в направлении от B к A .

Вектор ускорения \vec{a}_{BA}^τ направлен перпендикулярно к звену 2, который откладываем от точки n_2 .

Рассмотрим вторую часть системы (2.35). Движение точки B ограничено направляющей $(x-x)$, поэтому на плане ускорений (см. рис. 2.26, b) через полюс проводим горизонтальную прямую, соответствующую направлению $(x-x)$.

На пересечении тангенциальной составляющей a_{BA}^τ и $(x-x)$ получаем точку b (см. рис. 2.26, b), которая является искомой.

Истинное значение ускорения точки B равно:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}. \quad (2.36)$$

Для определения величины углового ускорения используем выражение:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{BA}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{l_{BA}}, c^{-2}. \quad (2.37)$$

Для определения направления ε_2 необходимо перенести вектор тангенциального ускорения a_{BA}^τ , изображённого на плане ускорений (см. рис. 2.26, в), в точку B , и стрелка этого вектора покажет направление ε_2 .

2.2.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

Рассмотрим схему кулисного механизма (рис. 2.27).

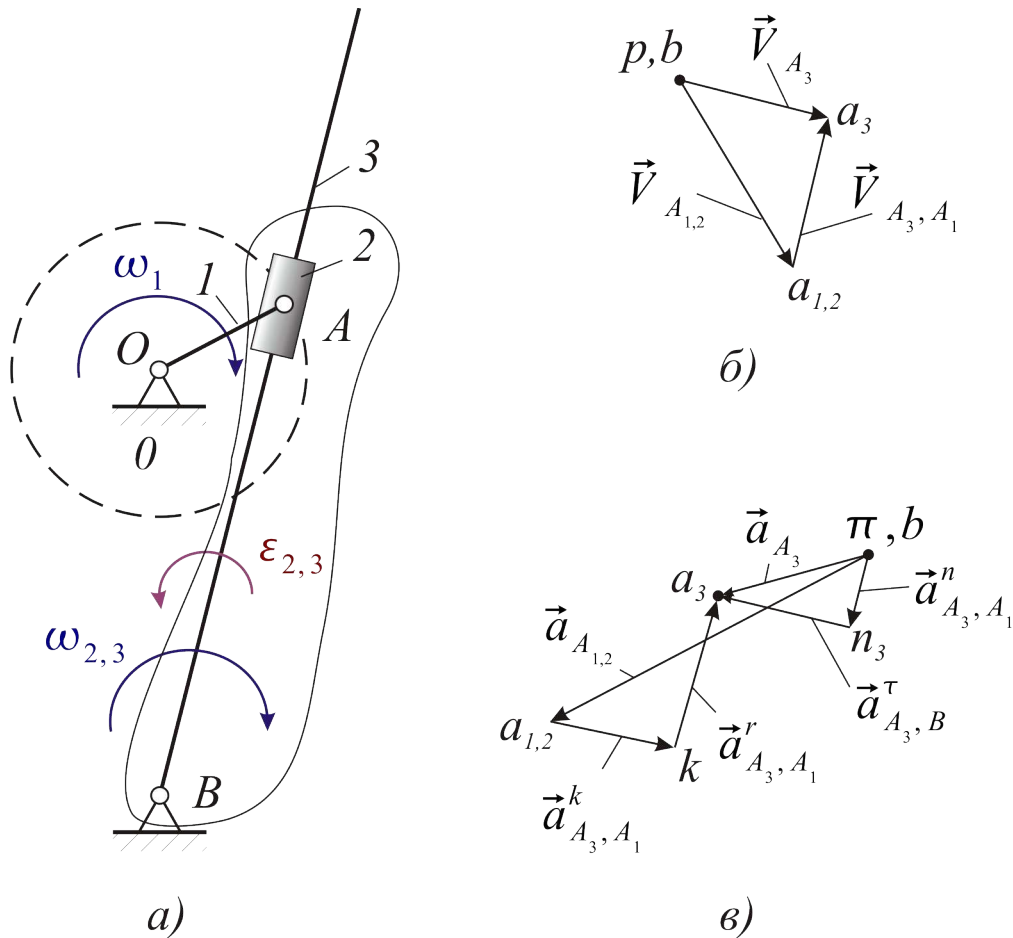


Рис. 2.27. Кулисный механизм: а) кинематическая схема: 0-стойка, 1-кривошип, 2-ползун (кулисный камень), 3-кулиса; б) план скоростей; в) план ускорений
Исходными данными для кинематического анализа являются:

- ✓ геометрическая схема механизма;
- ✓ угловая скорость начального звена $\omega_1 = const, c^{-1}$;
- ✓ угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0, c^{-2}$.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0;1) \rightarrow II(2;3). \quad (2.38)$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \quad (2.39)$$

Кинематический анализ проводим в соответствии с формулой строения механизма.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена $I(0;1)$.

Определим скорость точки A . Точка A в кулисном механизме, см. рис. 2.27, а), является «тройной», так как принадлежит кривошипу $I(A_1)$, кулисному камню $2(A_2)$ и кулисе $3(A_3)$. Кинематические параметры этих точек различны. Скорости точек A_1 и A_2 равны и определяются из выражения:

$$V_{A_1} = V_{A_2} = V_{A_{1,2}} = \omega_1 \cdot l_{OA}, \frac{M}{c}. \quad (2.40)$$

Данная скорость $V_{A_{1,2}}$ направлена перпендикулярна к звену OA в сторону вращения кривошипа I .

Выбираем масштабный коэффициент μ_V для построения планов скоростей из выражения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_{A_{1,2}}}{p a_{1,2}}, \frac{m/c}{mm}, \quad (2.41)$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей (см. рис. 2.27, б).

Откладываем вектор скорости точки $A_{1,2}(p \vec{a}_{1,2})$ в выбранном масштабе μ_V .

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения скорости точки A_3 составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_{1,2}} + \vec{V}_{A_3 A_{1,2}} \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{A_3 B} \end{cases}. \quad (2.42)$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.42). Скорость точки $A_{1,2}(\vec{V}_{A_{1,2}})$ определена ранее. Относительная скорость $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$ направлена в соответствии с движением кулисного камня (параллельно кулисе), и поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.27, б) из точки $a_{1,2}$

проведем прямую, параллельную кулисе 3.

Рассмотрим вторую часть системы (2.42). Так как скорость точки B равна нулю, помещаем её в полюс плана скоростей (см. рис. 2.27, б, точка b). Из этой точки b откладываем вектор относительной скорости \vec{V}_{A_3B} , перпендикулярный звену 3. На пересечении относительных скоростей $\vec{V}_{A_3A_{1,2}}$ и \vec{V}_{A_3B} получаем точку a_3 (см. рис. 2.27, б), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор $p\vec{a}_3$. Для получения величины скорости точки A_3 используем выражение:

$$V_{A_3} = p a_3 \cdot \mu_V, \quad \frac{M}{c}. \quad (2.43)$$

Определим величины угловых скоростей звеньев 2 и 3, используя выражение:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_{A_3B}}{l_{AB}} = \frac{p a_3 \cdot \mu_V}{l_{AB}}, \quad c^{-1}. \quad (2.44)$$

Для определения направления ω_2, ω_3 и необходимо перенести вектор относительной скорости \vec{V}_{A_3B} , изображённый на плане скоростей (см. рис. 2.27, б, $p\vec{a}_3$), в точку A , и стрелка этого вектора покажет направление ω_2, ω_3 .

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I(0;1)$. Определим ускорение точки $A_{1,2}$ из выражения:

$$a_{A_1} = a_{A_2} = a_{A_{1,2}} = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \quad \frac{M}{c^2}. \quad (2.45)$$

Данное ускорение направлено к центру вращения кривошипа I (см. рис. 2.27, в). Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_{A_{1,2}}}{\pi a_{1,2}}, \quad \frac{M/c^2}{\text{мм}}, \quad (2.46)$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса планов ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A_{1,2} (\pi \vec{a}_{1,2})$ в выбранном масштабе μ_a (см. рис. 2.27, в).

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения ускорения точки A_3 составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_{1,2}} + \vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^k + \vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r \\ \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A_3 B}^n + \vec{a}_{A_3 B}^\tau \end{cases} \quad (2.47)$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.47). Ускорение точки $A_{1,2}$ определено ранее. Кориолисово ускорение $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^k$ найдём из выражения:

$$a_{A_3 A_{1,2}}^k = 2\omega_2 \cdot V_{A_3 A_{1,2}}, \frac{M}{c^2}. \quad (2.48)$$

Направлено это ускорение по правилу Жуковского (вектор относительной скорости $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$ переносим в точку A (см. рис. 2.27, *a*) и поворачиваем в сторону вращения кулисы по часовой стрелке на 90° ($a_{1,2} k$)).

Величина $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^k$, изображаемая на плане ускорений (см. рис. 2.33, *в*), равна:

$$a_{1,2} k = \frac{a_{A_3 A_{1,2}}^k}{\mu_a}, \text{ мм}. \quad (2.49)$$

Вектор $a_{1,2} k$ откладываем на плане ускорений от точки a (см. рис. 2.27, *в*) в направлении, перпендикулярном кулисе 3. Вектор относительного ускорения $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r$ направлен параллельно звену 3, который откладываем от точки k .

Рассмотрим вторую часть системы (2.47). Ускорение точки B равно нулю. Помещаем её в полюс плана ускорений (см. рис. 2.27, *в*, точка b). Из этой точки откладываем вектор нормального ускорения $\vec{a}_{A_3 B}^n$, который определяется из выражения:

$$a_{A_3 B}^n = \omega_3^2 \cdot l_{AB}, \frac{M}{c^2}. \quad (2.50)$$

Направлено это ускорение от A к B . Величина $b n_3$ определяется из выражения:

$$b n_3 = \frac{a_{A_3 B}^n}{\mu_a}, \text{ мм}. \quad (2.51)$$

Вектор $b n_3$ откладываем на плане ускорений от точки b ($b n_3$ см. рис. 2.27, *в*). Вектор касательного ускорения $\vec{a}_{A_3 B}^\tau$ направлен перпендикулярно звену 3, который откладывается от точки n_3 . На пересечении линий $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r$ и $\vec{a}_{A_3 B}^\tau$ получаем искомую точку b , которую соединяем с полюсом π и получаем вектор πa_3 .

Истинные значения ускорения точки A_3 равно:

$$a_{A_3} = \pi a_3 \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}. \quad (2.52)$$

Для определения величины угловых ускорений используем выражения:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_{A_3B}^\tau}{l_{AB}} = \frac{n_3 a_3 \cdot \mu_a}{l_{AB}}, c^{-2}. \quad (2.53)$$

Для определения направлений $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ необходимо перенести вектор касательного ускорения $\vec{a}_{A_3B}^\tau$, изображённый на плане ускорений (рис. 2.27, в, $n_3 \vec{a}_3$), в точку A , и стрелки этих векторов покажут направления $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, которые направлены против часовой стрелки.

2.3. ПЕРЕДАЧИ

2.3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕДАЧАХ

Передачами называются различного рода механизмы, которые передают движение от источника к исполнительным органам машины.

Передачи бывают самого разнообразного вида, но в технике больше всего нашли применение передачи для преобразования и передачи вращательного движения. Процесс передачи вращения может происходить путём использования силы трения (фрикционные передачи) или прямым контактом твердых тел, т.е. путем зацепления. Такие передачи вращения осуществляются непосредственным касанием ведущего и ведомого звеньев или же путём применения гибкой нити (ремня, ленты, цепи и т.д.).

Различают два типа передач вращения:

- при равномерном вращении ведущего звена ведомое вращается также равномерно;
- при равномерном вращении ведущего колеса ведомое звено вращается неравномерно.

В первом случае самыми распространёнными являются круглые колёса фрикционные (или зубчатые), а также круглые шкивы, осуществляющие передачу при помощи гибкой связи.

Во втором, более редком, случае применяют не круглые колеса (колёса с неполным числом зубьев (зубчатые секторы)), мальтийские кресты и т.п.

Оси валов, между которыми осуществляется передача вращательного движения, могут быть расположены произвольным образом: быть параллельными, пересекаться под любыми углами, скрещиваться.

2.3.2. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

В тех случаях, когда особенно важным является постоянство

передаточного отношения ($u_{12} = const$), применяют зубчатые передачи. Зубчатые передачи получили широкое применение в станкостроительной, автотракторной и ряде других отраслях промышленности.

Зубчатые передачи - одни из самых распространённых видов приводов, т.е. вспомогательных механизмов, включаемых между машиной-двигателем и исполнительной машиной. Строгое постоянство передаточного отношения $u_{12} = const$ важно не только с кинематической, но и с динамической точки зрения. При непостоянстве передаточного отношения ($u_{12} \neq const$) возникают колебания звеньев, дополнительные динамические нагрузки, шум. Положительными свойствами зубчатых передач является их компактность, долговечность, высокий КПД. К недостаткам зубчатых передач относят сложность изготовления, затраты на ремонт в случае поломки. Передача вращения в зубчатой передаче осуществляется нажатием боковой поверхности зуба ведущего колеса на боковую поверхность зуба ведомого колеса.

Передаточным отношением пары зубчатых колес называется отношение их угловых скоростей:

$$u_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2}, \quad (2.54)$$

или передаточное отношение равно обратному отношению чисел зубьев этих зубчатых колес:

$$u_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.55)$$

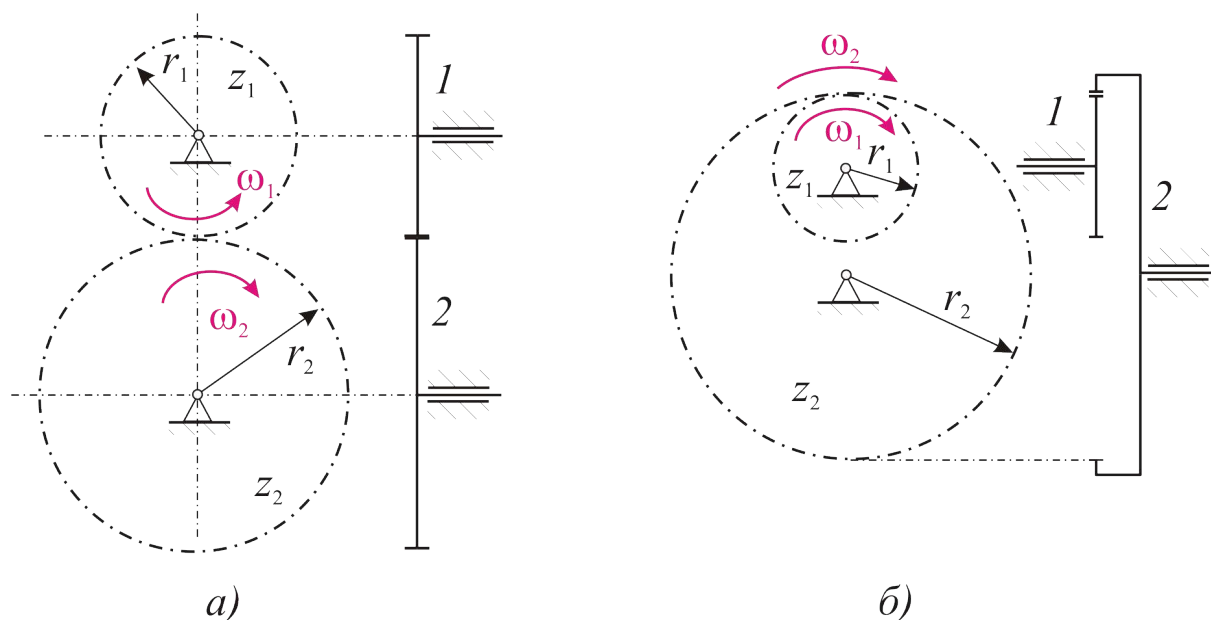


Рис. 2.28. Простейшая зубчатая передача: а) с внешним зацеплением; б) с внутренним зацеплением

Условно принято считать передаточное отношение отрицательным ($u_{12} < 0$) для пары зубчатых колес с внешним зацеплением (в этом случае

колёса вращаются в противоположные стороны) и принято считать передаточное отношение положительным ($u_{12} > 0$) для пары зубчатых колёс с внутренним зацеплением (колёса в этом случае вращаются в одну и ту же сторону).

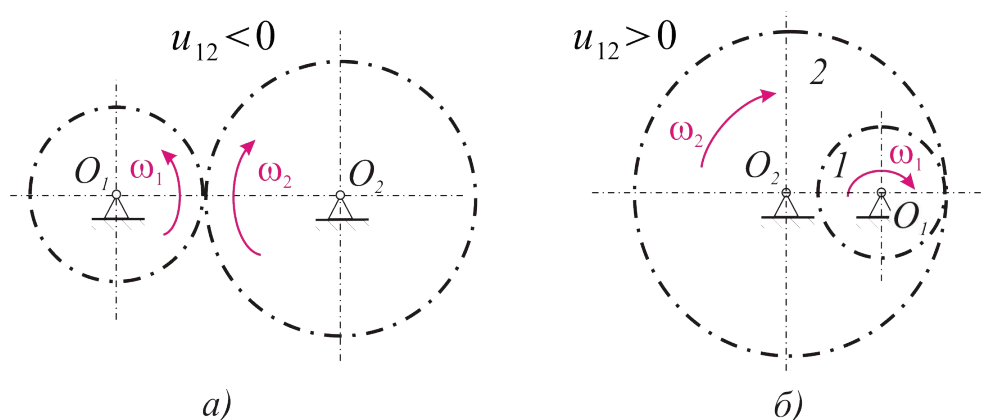


Рис. 2.29. Знак передаточного отношения: а) при внешнем зацеплении колёс; б) при внутреннем зацеплении колёс

В частном случае, когда радиус второго колеса будет бесконечно большим, это колесо превращается в прямолинейную зубчатую рейку. Такое зацепление называется реечным и служит для преобразования вращательного движения колеса в поступательное движение зубчатой рейки или наоборот.

Представим, что на перекатывающихся друг по другу без скольжения катках радиусами r_1 и r_2 фрикционной передачи закреплены зубчатые венцы. Тогда получим зубчатую передачу, в которой передаточное отношение:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.56)$$

Окружности, которые при зацеплении зубчатых колёс перекатываются без скольжения и радиусы которых обратно пропорциональны угловым скоростям, называются *начальными*.

2.3.3. ЭВОЛЬВЕНТА КРУГА

При выборе заданий на профилирование зубьев на практике необходимо руководствоваться соображениями кинематического, динамического, технологического и эксплуатационного характера.

Требования кинематического характера:

- построение должно быть достаточно простым.

Требования динамического характера:

- давление на зуб должно быть постоянно по величине и направлению;

- форма зуба должна обеспечивать наибольшую прочность;

- форма зуба должна обеспечивать минимальный износ.

Требования технологического характера:

- относительная простота изготовления на современном оборудовании.

Требования эксплуатационного характера:

- долговечность в работе;
- безударный характер работы, бесшумность;
- легкость монтажа;
- взаимозаменяемость.

Вследствие всего этого в машиностроении пользуются только несколькими видами кривых в качестве профилей зубьев. Из этих кривых мы рассмотрим так называемые *эвольвенты круга*, являющиеся основным типом кривых, по которым очерчены профили современных зубчатых механизмов и на некоторых видах *циклоидальных кривых*.

Выясним, что такое эвольвента круга и какими свойствами она обладает. Пусть задана окружность (рис. 2.30), с центром в точке O . Проведём прямую AB , касательную к этой окружности, и будем катить эту прямую без скольжения по окружности.

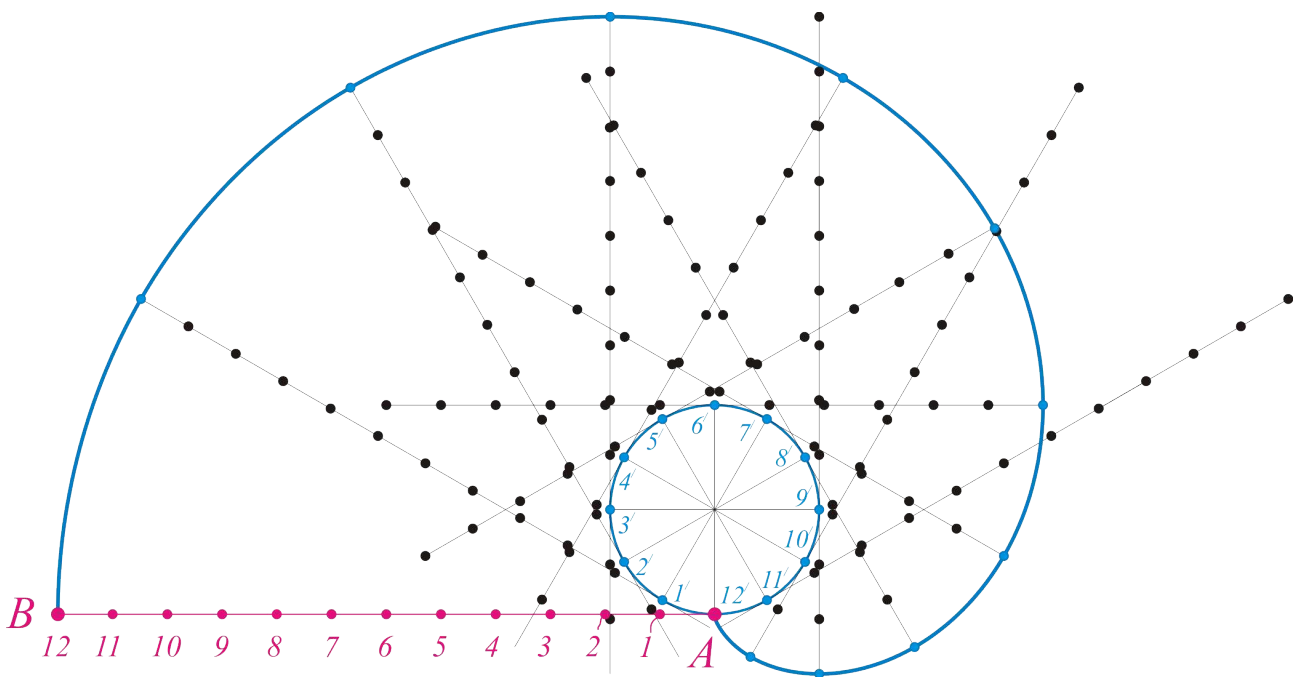


Рис.2.30. Линия эвольвенты

Для построения эвольвенты круга делим окружность на равные дуги $A-1'$, $1'-2'$, ... $11'-12'$. На прямой откладываем от точки A участки, равные длинам этих дуг так, чтобы выполнялись следующие соотношения.

$A-1' = A-1$; $1'-2' = 1-2$; ... $11'-12' = 11-12$. Тогда при качении прямой AB без скольжения по окружности точки $1, 2, \dots, 12$ прямой AB будут последовательно совпадать с точками $1', 2', \dots, 12'$ окружности. При этом все точки прямой будут описывать кривые, которые носят название эвольвенты круга.

Таким образом, окружность, по которой катится без скольжения прямая AB , является *эволютой* — геометрическим местом центров кривизны эвольвенты, описываемых начальной прямой AB .

Свойства эвольвенты:

1. образующая прямая всегда нормальна к эвольвенте (основное свойство);
2. эвольвента всегда начинается на основной окружности и расположена вне её;
3. эвольвента является кривой без перегибов;
4. форма эвольвенты зависит от радиуса основной окружности.

Рассмотрим окружность (рис. 2.31), радиуса r_0 . Построим эвольвенту. Началом эвольвенты служит точка M_0 . Соединим точки M_0 и O . Выберем произвольную точку M на эвольвенте. Соединим точки O и M радиусом-вектором \vec{r} . Обозначим через ρ отрезок AM .

Угол между M_0O и радиусом-вектором произвольной точки эвольвенты обозначим через θ . Угол между радиусом-вектором и прямой l к касательной обозначим через α .

Рассмотрим, чему равна длина дуги M_0A :

$$\overset{\sim}{M_0A} = r_0(\theta + \alpha), \quad \theta, \alpha - \text{ в радианах.}$$

Из прямоугольного $\triangle OAM$ имеем:

$$MA = OA \cdot \operatorname{tg} \alpha = r_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

По свойству эвольвенты $\overset{\sim}{M_0A} = MA \Rightarrow$

$$r_0(\theta + \alpha) = r_0 \operatorname{tg} \alpha; \quad \theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha.$$

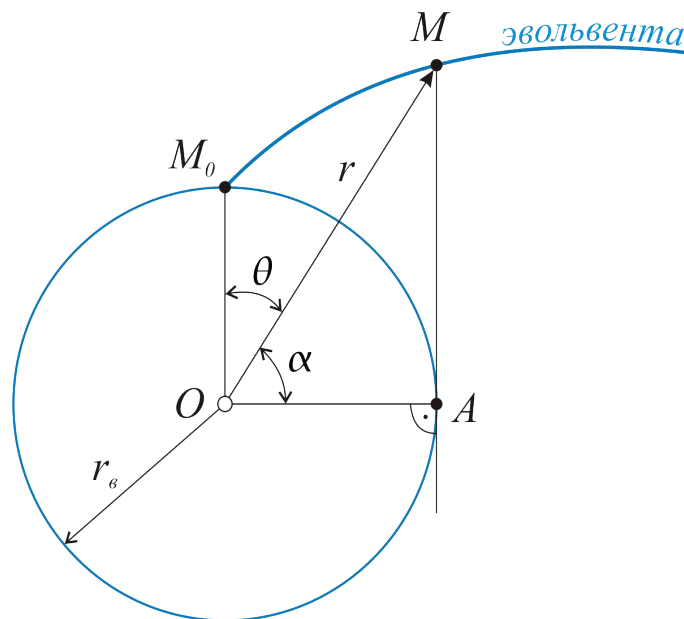


Рис. 2.31. К построению эвольвенты

При перемещении точки M по эвольвенте меняются как угол θ , так и угол α . Зависимость между этими углами называют *эвольвентной функцией* или *эвольвентой*, которую обозначают как $\operatorname{inv} \alpha$.

Значение этой функции:

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (2.57)$$

2.3.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА

Рассмотрим геометрические элементы зубчатого колеса, рис. 2.32.

Центроиды круглых зубчатых колёс ζ_1 и ζ_2 называются *начальными окружностями*.

Дуга начальной окружности, вмещающая один зуб (без впадины), носит название *начальной толщины зуба* s_w .

Дуга начальной окружности, вмещающая впадину (расстояние между двумя соседними зубьями), называется *начальной шириной впадины* l_w .

Шаг по начальной окружности определяется как $p_w = s_w + l_w$.

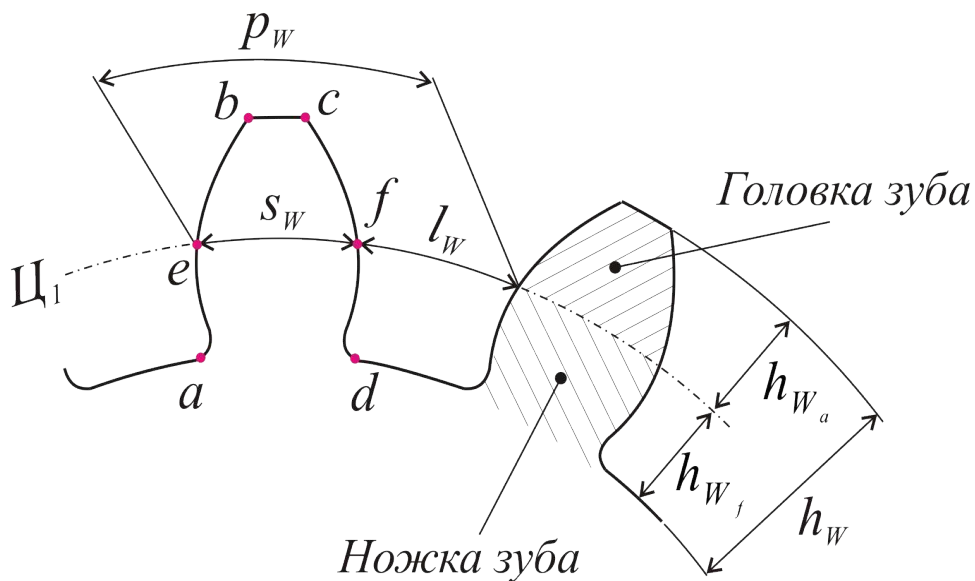


Рис.2.32. Геометрические элементы колеса

Длины начальных окружностей колёс 1 и 2 равны:

$$2\pi r_{w_1} = z_1 p_w \quad \text{и} \quad 2\pi r_{w_2} = z_2 p_w \Rightarrow p_w = \frac{2\pi r_{w_1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{w_2}}{z_2}. \quad (2.58)$$

Из этого соотношения видно, что шаг зацепления всегда выражается через радиус (диаметр) окружности несоизмеримым числом, так как в правую часть входит трансцендентное число π . Это затрудняет подбор зубчатых колёс и практическое их измерение. Поэтому для определения основных размеров зубчатых колёс в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый *модулем зацепления*.

Модуль измеряется в миллиметрах и обозначается буквой m . Его величина равна:

$$m = \frac{p}{\pi}, \quad [\text{мм}]. \quad (2.59)$$

Центральный угол τ , опирающийся на дугу окружности зубчатого колеса, равную окружному шагу p , называется *угловым шагом* зубьев. Для двух зубчатых колес, находящихся в зацеплении:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}; \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}. \quad (2.60)$$

Для того, чтобы не иметь на машиностроительных заводах, изготавливающих зубчатые колёса, большие комплекты режущих инструментов, производители условились на некоторой окружности, называемой *делительной*, выбирать модули из ряда рациональных чисел. Стандартом установлены два ряда модулей, до которых должны округляться модули, полученные из расчётов.

Профиль каждого зуба имеет часть *evcf*, выступающую за начальную окружность, называемую *начальной головкой зуба*, и часть *aefd*, находящуюся внутри начальной окружности и называемую *начальной ножкой зуба*.

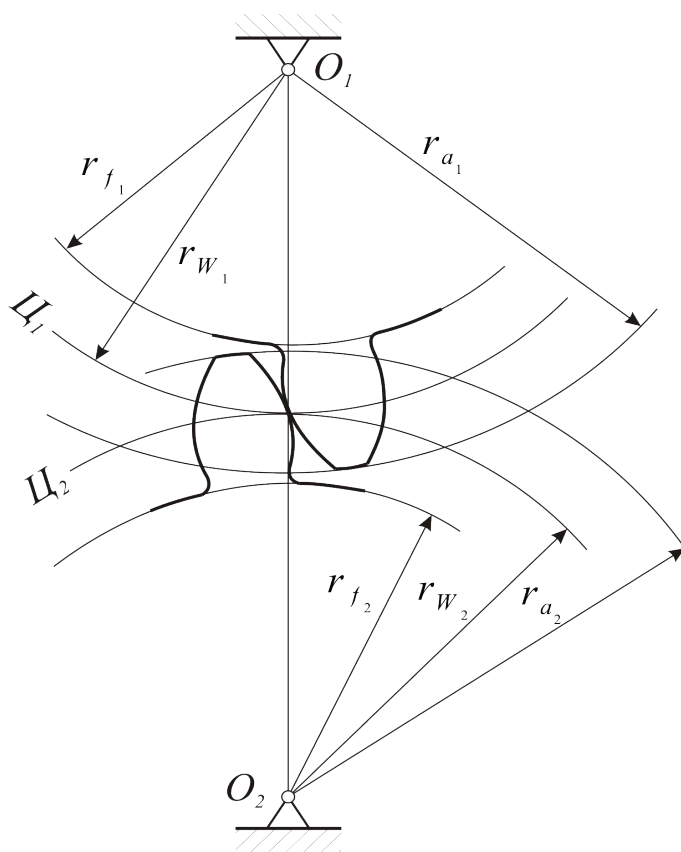


Рис. 2.33. Геометрия зацепления двух зубчатых колёс

Так как все размеры зубьев колеса одинаковы, то все головки зубьев внешнего зацепления (рис. 2.33) ограничиваются снаружи *окружностями вершин* радиусов r_{a_1} и r_{a_2} , а все ножки зубьев ограничиваются изнутри *окружностями впадин* радиусов r_{f_1} и r_{f_2} . На рис. 2.33 также показаны r_{W_1} и r_{W_2} - начальные окружности. Кроме того, r_i - обозначаются

делительные окружности и r_{ei} - основные окружности.

Если делительные окружности совпадают с начальными, такие колеса называются *нулевыми*.

$$d_1 = 2r_1 = \frac{p}{\pi} z_1 = m z_1; \quad d_2 = m z_2.$$

Высота обычно принимается $h_a = m$ и $h_f = 1,25 m$.

Большой размер ножки по сравнению с головкой обеспечивает зазор между головкой зуба и впадиной.

Для расчета параметров зацепления двух зубчатых колёс используют ряд зависимостей:

$$d_{a_1} = d_1 + 2 h_a = m z_1 + 2 m = m (z_1 + 2);$$

$$d_{a_2} = m (z_2 + 2);$$

$$d_{f_1} = d_1 - 2 h_f = m z_1 - 2,5 m = m (z_1 - 2,5);$$

$$d_{f_2} = m (z_2 - 2,5).$$

Межосевые расстояния можно рассчитать как

$$a_w = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{m z_1}{2} + \frac{m z_2}{2} = \frac{m}{2} (z_1 + z_2).$$

2.3.5. КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЁС

Механизмы, состоящие из двух сопряжённых зубчатых колёс, относят к простейшим. Передаточное отношение, которое можно воспроизвести таким механизмом, невелико.

На практике необходимо воспроизведение значительно больших передаточных отношений.

Для этого применяются несколько последовательно соединённых колёс, где, кроме входного и выходного, имеются ещё и промежуточные колёса.

Такие сложные зубчатые механизмы получили название *многоступенчатых передач* или *редукторов*.

Многоступенчатые передачи, у которых оси вращения колёс неподвижны, носят название *рядовые соединения*.

Рассмотрим рядовое соединение зубчатых колёс (рис.2.34).

Общее передаточное отношение всего механизма, изображенного на рис.

$$2.34, \quad u_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Определим передаточное отношение для каждой пары колёс:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad u_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}; \quad u_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}; \quad u_{4'5} = \frac{\omega_4}{\omega_5}.$$

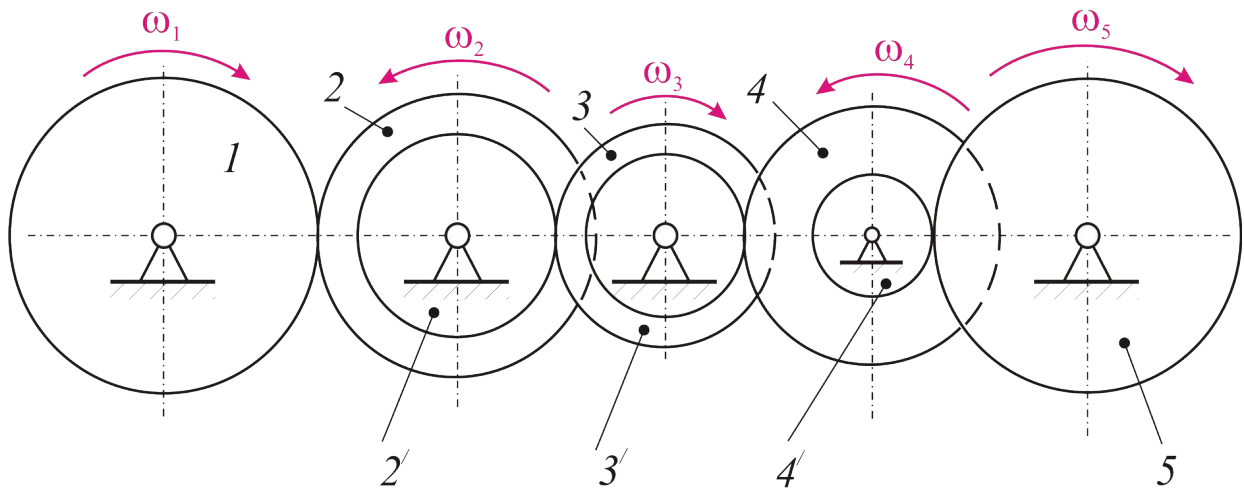


Рис. 2.34. Рядовое соединение зубчатых колёс

Перемножая полученные передаточные отношения, получим:

$$u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} \cdot u_{4'5} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Так как $u_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}$, то $u_{15} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} \cdot u_{4'5}$.

Передаточное отношение многоступенчатой зубчатой передачи есть произведение взятых со своими знаками передаточных отношений отдельных её ступеней.

В общем случае:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)'n}. \quad (2.61)$$

Для каждой ступени:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{12} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} \\ u_{2'3} = \pm \frac{r_3}{r_{2'}} = \pm \frac{z_3}{z_{2'}} \\ \dots \dots \dots \\ u_{(n-1)'n} = \pm \frac{r_n}{r_{(n-1)'}} = \pm \frac{z_n}{z_{(n-1)'}} \end{array} \right. , \quad (2.62)$$

где $r_1 \dots r_n$ - радиусы начальных окружностей;

$z_1 \dots z_n$ - числа зубьев;

знак «+» - берётся при внутреннем зацеплении и знак «-» - при внешнем зацеплении.

В общем случае:

$$u_{1n} = (-1)^k \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n}{r_1 \cdot r_2' \cdot \dots \cdot r_{(n-1)'}} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_2' \cdot \dots \cdot z_{(n-1)'}}, \quad (2.63)$$

где k - число внешних зацеплений.

Рассмотрим следующую передачу.

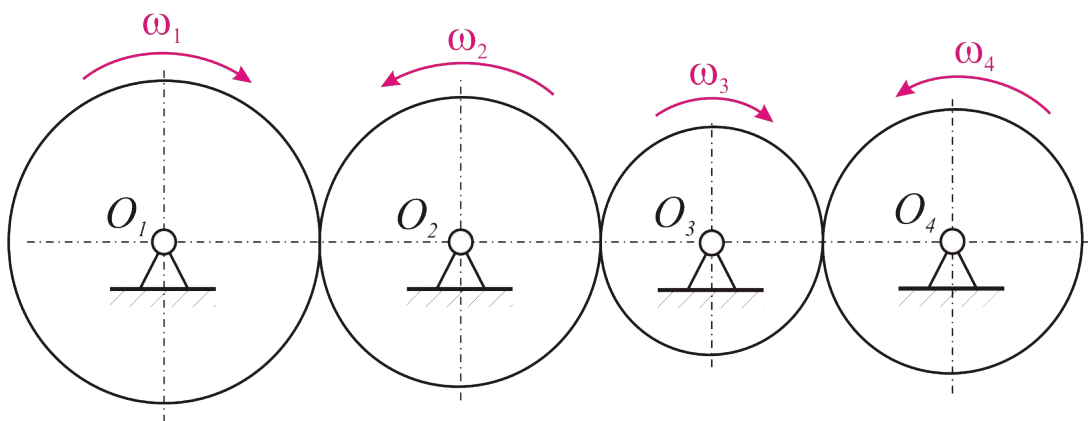


Рис. 2.35. К рассмотрению рядовой передачи

При передаче вращения между валами, находящимися на большом расстоянии друг от друга, или при необходимости воспроизведения передаточного отношения определённого знака часто применяют рядовое соединение колёс, каждое из которых имеет собственную ось вращения.

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^k \cdot u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = -\frac{z_4}{z_1}. \quad (2.64)$$

Как видно из этого выражения, величина общего передаточного отношения u_{14} не зависит от промежуточных зубчатых колёс. Такие колёса называются *паразитными*.

При рассмотрении редукторов с коническими колёсами передаточному отношению приписывают знак плюс, если направление угловых скоростей входных и выходных звеньев совпадают, и знак минус — если их направления противоположны.

2.3.6. ПЛАНЕТАРНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Такие многозвенные зубчатые механизмы обязательно имеют колеса с движущимися геометрическими осями, которые называются планетарными или сателлитами.

Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется *водилом*. Вращающееся вокруг неподвижной оси колесо, по которому обкатываются сателлиты, называется *центральной*; неподвижное центральное колесо называется *опорным*. Как правило, планетарные механизмы изготавливаются соосными.

Планетарные механизмы подразделяются на *планетарные редукторы* и *мультипликаторы*, которые обладают одной степенью свободы и обязательно имеют опорное звено, и зубчатые дифференциальные механизмы, число степеней свободы которых два и более ($W \geq 2$) и которые опорного звена обычно не имеют.

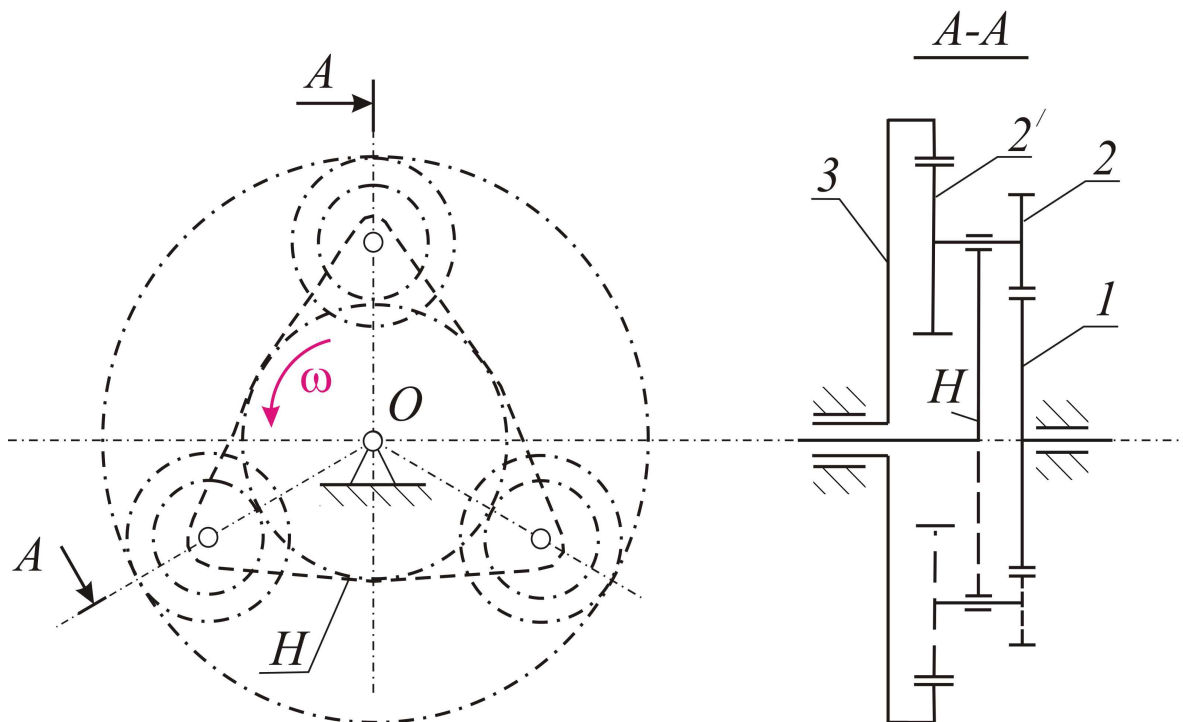


Рис. 2.36. Схема дифференциального механизма

Степень подвижности механизма определяется так:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad n = 4, \quad p_{5\text{вращ}} = 4, \quad p_{4\text{зубч}} = 2.$$

$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$. В данном механизме три сдвоенных сателлита. *Планетарным* (собственно *планетарным*) *механизмом* называют зубчато-рычажный механизм, обладающий одной степенью подвижности. Одно из центральных колес закреплено. В состав дифференциального и планетарного механизмов входят: два центральных колеса (их иногда называют солнечными, коронами и т.д.), рычаг - водило (обычно обозначаемое буквой *H*) и один или несколько сателлитов (одинарных или сдвоенных), оси вращения которых установлены на водиле. Степень подвижности планетарного механизма определяется так:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad n = 3, \quad p_{5\text{вращ}} = 3, \quad p_{4\text{зубч}} = 3.$$

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

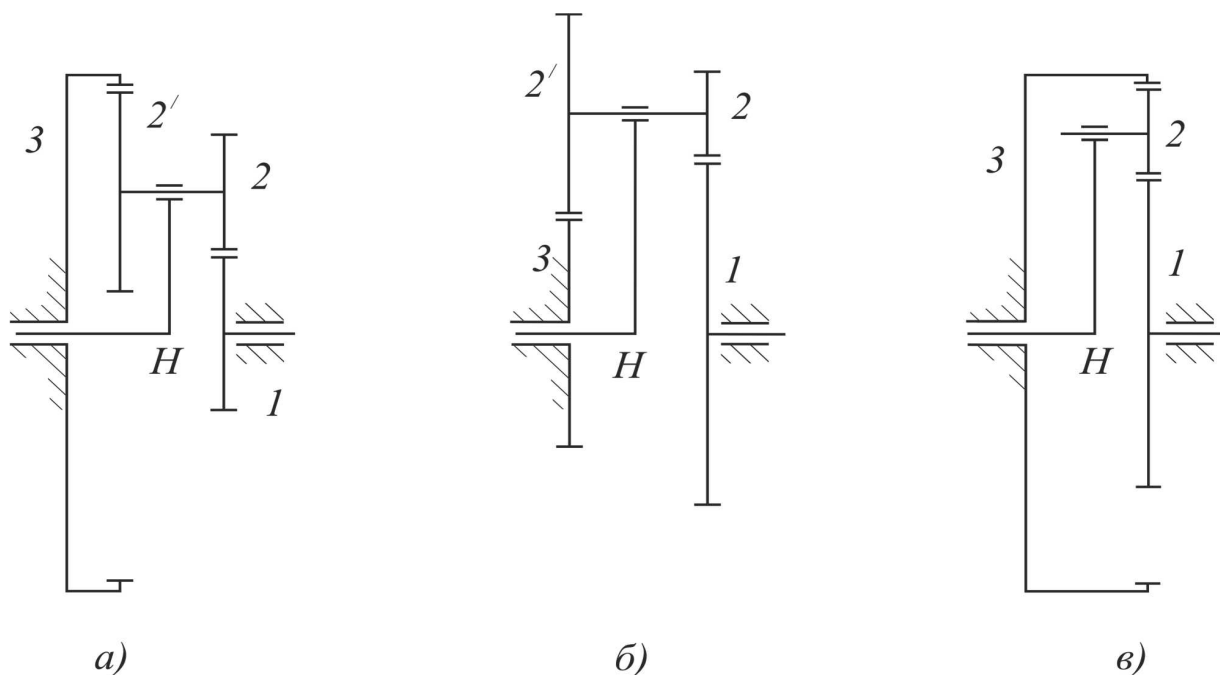


Рис. 2.37. Схема планетарных механизмов

2.3.7. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Существует несколько способов определения передаточных отношений дифференциальных и планетарных механизмов. Нами будет использован аналитический метод с применением универсальной *формулы Виллиса* для дифференциального механизма:

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}. \quad (2.65)$$

В этой формуле слева стоит передаточное отношение обращенного механизма (если неподвижным будет водило H , - его принимают условно неподвижным) от центрального колеса 1 к центральному колесу 3 . Значение этого передаточного отношения обязательно нужно указывать с его знаком (плюс или минус).

Если вместо дифференциального механизма будет планетарный, то эта формула несколько видоизменится, т. е. если $\omega_3 = 0$, то она примет вид:

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - U_{13}^H. \quad (2.66)$$

Этой формулой пользуются в том случае, если входное звено будет центральное колесо 1 , а выходное - водило H . В правой части выражения значение u_{13}^H - передаточное отношение обращенного механизма (при неподвижном водиле H и раскрепленном колесе 3 (с его знаком)).

Если же входное будет водило H , то формула примет вид:

$$u_{H1} = \frac{1}{u_{1H}} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - u_{13}^H}. \quad (2.67)$$

Если в дифференциальном механизме с двумя степенями подвижности связать угловые скорости каких-либо двух его валов дополнительной передачей, то это уменьшит число степеней свободы на единицы. Весь механизм будет обладать одной степенью подвижности и называться замкнутым дифференциальным механизмом.

2.3.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Решим задачи двумя способами: графическим (с помощью картины угловых скоростей) и аналитическим (с помощью формулы Виллиса).

Пример 2.2. Определить u_{1H_2} (рис. 2.38), если число зубцов z всех колес задано.

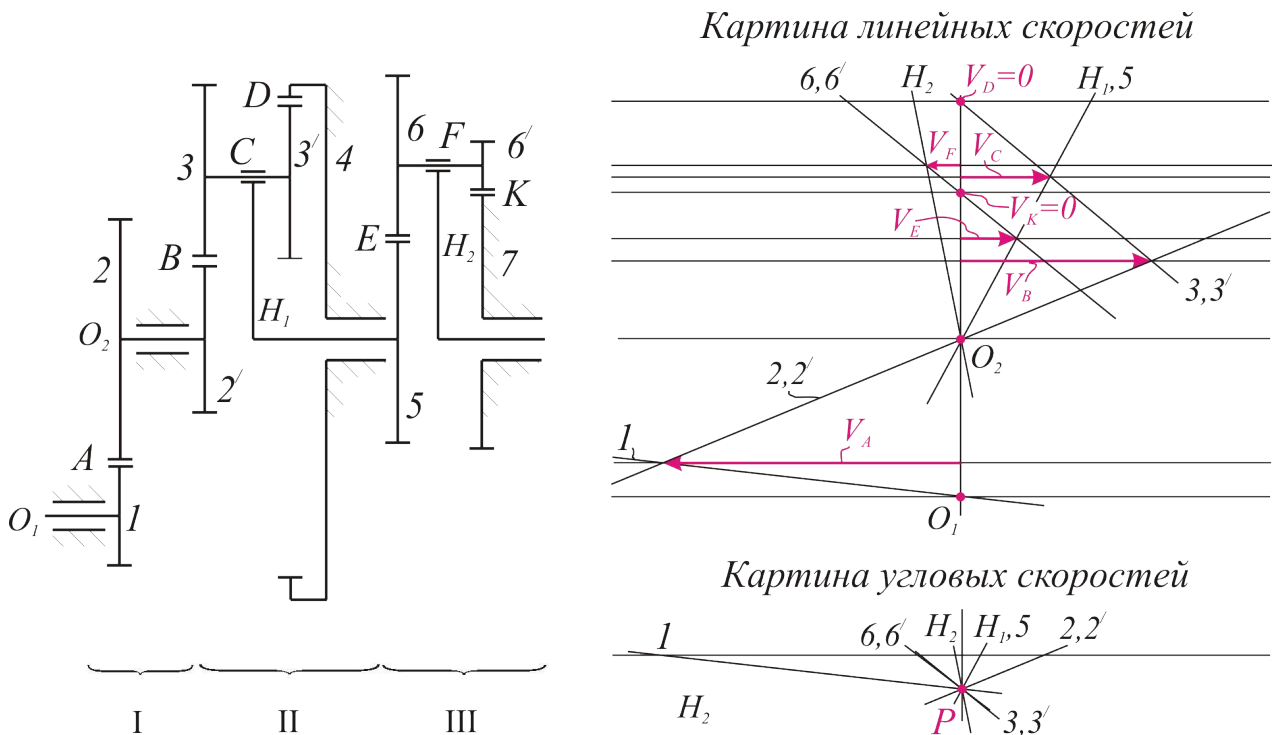


Рис. 2.38. Многоступенчатый зубчатый механизм

Решение. Это сложная многоступенчатая серия, можно выделить в ней три ступени колес. I - простая передача состоящая, из колес 1 и 2; II ступени - планетарная, из колес 2-3-3'-4 и водила H_1 , а III ступени тоже планетарная серия, из колес 5-6-6'-7 и водила H_2 .

Передачное число сложной серии равно в общем случае произведению

передаточных отношений отдельных ступеней.

$$u_{1H_2} = u_{12} \cdot u_{2H_1} \cdot u_{5H_2},$$

$$\text{где } u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad u_{2H_1} = 1 - u_{24}^{H_1} = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(+\frac{z_4}{z_3}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

$$u_{5H_2} = 1 - u_{57}^{H_2} = 1 - \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = 1 - \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_7}{z_6},$$

и окончательно

$$u_{1H_2} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(1 - \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_7}{z_6}\right).$$

Пример. 2.3

Определить u_{13} замкнутого дифференциального механизма (рис. 2.39).

Решение. Данный механизм является сложной серией колес - замкнутый дифференциальный механизм.

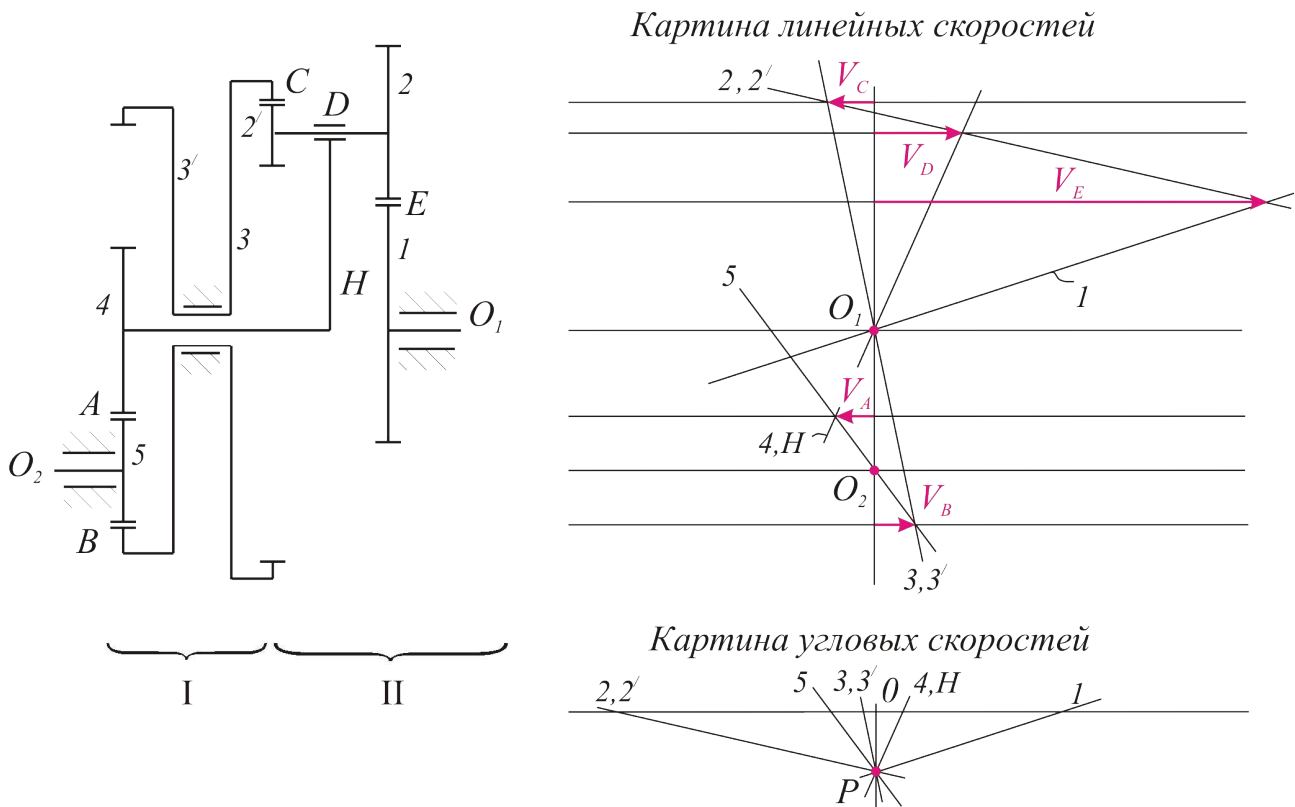


Рис. 2.39. Замкнутый дифференциальный механизм

Дифференциальная часть состоит из колес $1-2-2'-3$ и водила H , замыкающая часть — из колес $4-5-3$, при этом из чертежа видно, что $\omega_H = \omega_4$ и $\omega_3 = \omega_3$.

Рассмотрим дифференциальную часть и по формуле (2.65)

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Определим левую часть выражения $u_{13}^H = u_{12} \cdot u_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)$,

следовательно, $\left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}$.

Рассмотрим замыкающую часть и определим

$u_{43} = u_{45} \cdot u_{53} = \left(-\frac{z_5}{z_4}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_5}\right) = -\frac{z_3}{z_4}$, т.е. $u_{43} = -\frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4}$, но выше было

указано $\omega_H = \omega_4$ и $\omega_3 = \omega_3$.

Заменяем их и получим $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\omega_H}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4}$, или $\omega_H = -\omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}$.

Далее значение ω_H подставим в правую часть уравнения

$$\left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\omega_1 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}}{\omega_3 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}}.$$

Освободимся от знаменателя и вынесем ω_3 за скобки:

$$-\omega_3 \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \omega_1 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}.$$

Поделим обе части на ω_3 :

$$-\left[\left(1 + \frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_3}{z_4}\right] = -\frac{\omega_1}{\omega_3} = u_{13}.$$

Знак минус показывает, что колесо 1 и колесо 3 вращаются друг относительно друга в разные стороны.

2.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.4.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

При рассмотрении вопросов кинематического анализа механизмов мы всегда предполагаем движение входных звеньев заданными. Движение выходных звеньев изучается в зависимости от заданного движения входных. При этом силы, действующие на звенья механизма, и силы, возникающие при его движении, не изучаются. Таким образом, при кинематическом анализе исследование движения механизмов ведётся с учетом только структуры механизмов и геометрических соотношений между размерами их звеньев.

Динамический анализ механизмов включает в себя следующие задачи:

1. изучение влияния внешних сил, сил веса звеньев, сил трения и массовых сил (сил инерции) на звенья механизма, на элементы звеньев, на кинематические пары и неподвижные опоры и установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма;
2. изучение режима движения механизма под действием заданных сил и установления способов, обеспечивающих заданные режимы движения механизма.

Первая задача носит название *силового анализа механизмов*, а вторая задача - название *динамики механизмов*.

Первая из указанных задач имеет своей целью определение внешних неизвестных сил, действующих на звенья механизма, а также усилий (реакций), возникающих в кинематических парах при движении механизма.

К *внешним* силам, к примеру, относятся: давление рабочей смеси (газа, жидкости) на поршень ДВС; вращающий момент, развиваемый электродвигателем на валу рабочего механизма и др.

Если известны внешние сил, действующие на звенья механизма, и известны законы движения всех его звеньев, то можно методами, изучаемыми в механике, определить силы трения и реакции связей в кинематических парах, силы сопротивления сред, силы инерции звеньев и другие силы, возникающие при движении механизма, и тем самым произвести так называемый *силовой расчёт механизма*.

Как было указано выше, силовой расчёт механизмов заключается в определении тех сил, которые действуют на отдельные звенья механизмов при их движении. Зная силы, действующие на различные звенья механизма, конструктор может выбрать наиболее рациональные размеры звеньев, определить конструктивные их формы, необходимые для достаточной прочности деталей, обеспечить в кинематических парах достаточную смазку и т.д.

Вторая задача имеет своей целью определение мощности, необходимой для воспроизведения заданного движения машины или механизма, т.е. изучение законов распределения этой мощности на выполнение работ, связанных с действием различных сил на механизм.

К той же задаче относится вопрос об определении истинного движения механизма под действием приложенных к нему сил. Эта задача носит название теории движения машины или механизма под действием заданных сил.

До появления в технике быстроходных машин определение сил в механизмах велось без учёта тех дополнительных сил, которые возникают при движении механизмов — такие расчёты носят название *статических расчётов*. В результате появления в технике быстроходных машин стало необходимым учитывать и те силы, которые возникают при движении механизма и часто значительно превышают статические силы. Расчёты, в которых учитываются как статические, так и динамические нагрузки, называются *динамическими*.

Метод силового расчёта механизма с использованием сил инерции и применением уравнений динамического равновесия носит название *кинетостатического расчёта*.

2.4.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА

При работе механизма и к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы производственных сопротивлений, силы тяжести и др. Кроме того, при движении механизмов в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые можно рассматривать как составляющие этих реакций. Реакции в кинематических парах, также как и силы трения, по отношению ко всему механизму являются силами внутренними, но по отношению к каждому звену, входящему в кинематическую пару, оказываются силами внешними.

Силы, которые стремятся ускорить движение механизма, называются *движущими силами*. Иначе, движущими силами будем называть те силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают *положительную работу*.

Силы, которые стремятся замедлить движение механизма, называются *силами сопротивления*. Иначе, силами сопротивления будем называть те силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают *отрицательную работу*.

Силами производственного сопротивления, или силами полезного сопротивления, называются силы сопротивления, преодоление которых необходимо для выполнения требуемого технологического процесса.

Силами непроизводственного сопротивления, или силами вредного сопротивления, называются те силы, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления.

К примеру, для ДВС движущей силой является давление расширяющего газа на поршень. Для того же ДВС силами сопротивления являются сила трения в подшипниках, цилиндрах, сопротивление той рабочей машины, которая приводится в движение двигателем и т.п. К производственным сопротивлениям для ДВС можно отнести сопротивление той части машины, которая приводится двигателем в движении. К непроизводственным сопротивлениям ДВС можно отнести силу сопротивления воздуха, силы трения и т.д.

Необходимо отличать некоторую условность в разделении сил движущих и сил сопротивления.

Сила тяжести звеньев при подъёме их центров тяжести оказывается силами сопротивления, а при опускании центров тяжести - силами движущими.

Работа движущих сил называется *затрачиваемой*, работа сил производственных сопротивлений - *полезной* работой, и работа непроизводственных сопротивлений - *вредной работой*.

2.4.3. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Как известно из теоретической механики, в общем случае все силы инерции звена BC , совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскости симметрии, параллельную плоскости движения, могут

быть сведены к силе инерции $\vec{\Phi}$, приложенной в центре масс S звена, и к паре сил инерции, момент которой равен M_ϕ .

Сила инерции:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_S, \quad (2.68)$$

где m - масса звена [кг]; \vec{a}_S - вектор полного ускорения центра масс S $\left[\frac{M}{c^2} \right]$.

Таким образом, для определения силы инерции $\vec{\Phi}$ звена необходимо знать его массу и вектор полного ускорения \vec{a}_S его центра масс S или проекции этого вектора на координатные оси.

Размерность вектора силы: $[\Phi] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{c^2} \right] = [H]$.

Вектор полного ускорения центра масс в механизмах удобно определять из построенного плана ускорений, применяя известное из кинематики свойство подобия.

Пусть дано звено BC (рис. 2.40) и известны ускорения \vec{a}_B и \vec{a}_C его точек B и C , которые на плане ускорений изображаются отрезками (πb) и (πc) , построенными в масштабе μ .

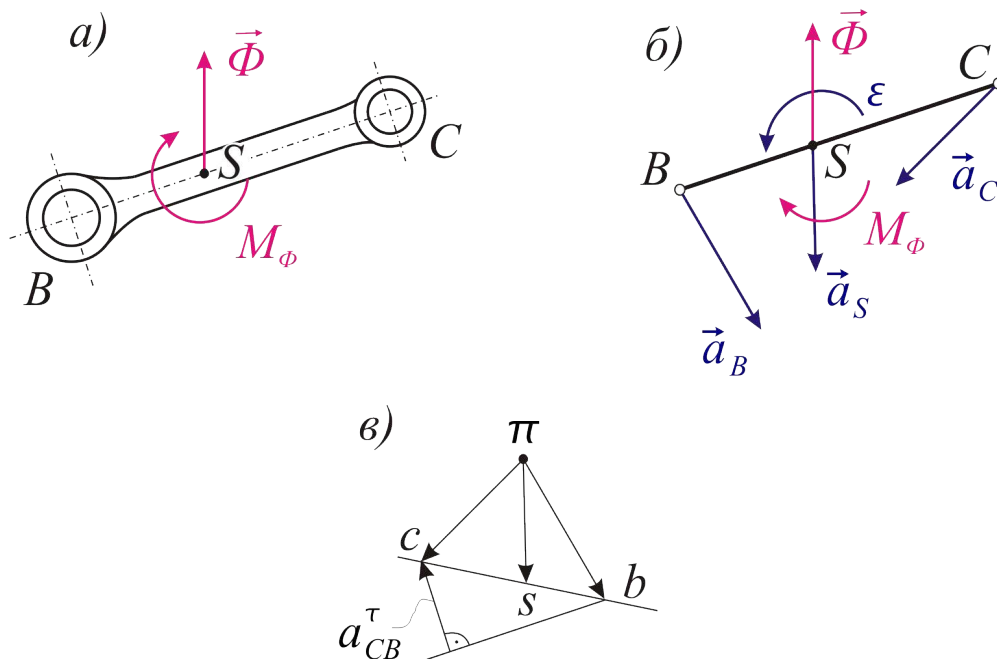


Рис. 2.40. К определению полного ускорения центра масс

Чтобы определить полное ускорение \vec{a}_S центра масс S звена, соединяем точки b и c прямой и делим этот отрезок в том же отношении, в котором точка S делит отрезок BC .

Соединив полученную на плане ускорений точку s с точкой π ,

получим величину полного ускорения \vec{a}_S центра масс S :

$$a_S = \mu_a(\pi s). \quad (2.69)$$

Сила инерции звена $\vec{\Phi}$ направлена противоположно ускорению центра масс \vec{a}_S центра масс точки S и равна по величине

$$\Phi = -m a_S. \quad (2.70)$$

Момент M_ϕ пары сил инерции направлен противоположно угловому ускорению ε и может быть определён по формуле

$$M_\phi = -J_S \varepsilon, \quad (2.71)$$

где J_S - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости движения звена; ε - угловое ускорение звена.

Размерности данных величин:

$$[J_S] = [\text{кг} \cdot \text{м}^2]; \quad [\varepsilon] = \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right],$$

$$\text{следовательно, } [M_\phi] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right] = [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Величина углового ускорения ε определяется из равенства:

$$\varepsilon = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}}. \quad (2.72)$$

Таким образом, все силы инерции звена в общем случае могут быть сведены к главному вектору сил инерции $\vec{\Phi}$, приложенному в центре масс звена, и главному моменту сил инерции M_ϕ .

Рассмотрим некоторые частные случаи движения звеньев механизмов.

Первый случай. Звено движется поступательно с некоторым ускорением (рис. 2.41). Так как звено движется поступательно, то угловое ускорение равно нулю, следовательно, момент пары сил также будет равен нулю. Все силы инерции сводятся к одной результирующей силе Φ , приложенной в центре масс S звена и направленной противоположно центру масс.

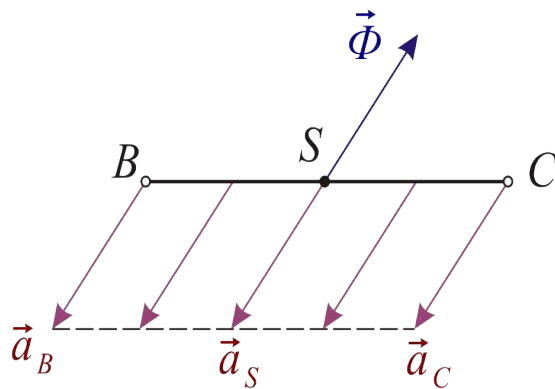


Рис. 2.41. Поступательное движение звена с ускорением

Второй случай. Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс (рис. 2.42), тогда ускорение центра масс $\vec{a}_S = 0$, $\Rightarrow \Phi = 0$.

Если при этом угловое ускорение ε не равно нулю, то силы инерции составляют пару с моментом M_ϕ , который равен $M_\phi = -J_S \varepsilon$.

Этот случай имеет место для неравномерного вращающихся деталей (шкивы, барабаны, роторы и т.д.), центры масс которых находятся на оси вращения.

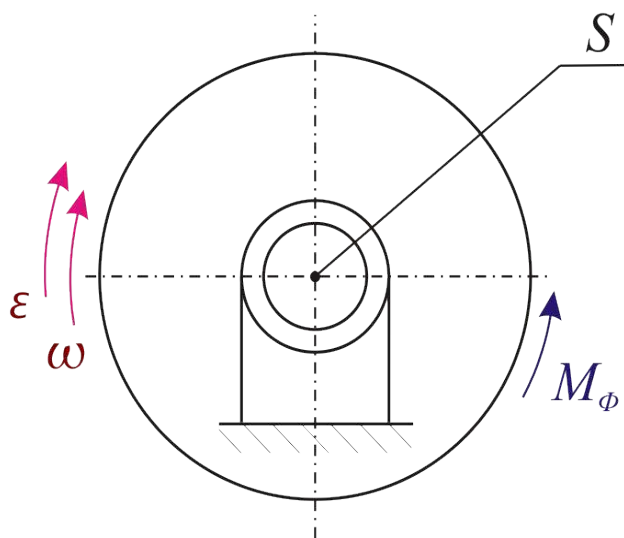


Рис. 2.42. Неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, проведённой через центр масс

Третий случай. В случае вращательного движения звена BC вокруг некоторой оси, не проходящей через центр масс S (рис. 2.43), его силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе $\vec{\Phi}$, направленной противоположно ускорению \vec{a}_S и равной $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_S$, и паре сил инерции с моментом $M_\phi = -J_S \varepsilon$, где J_S - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс S.

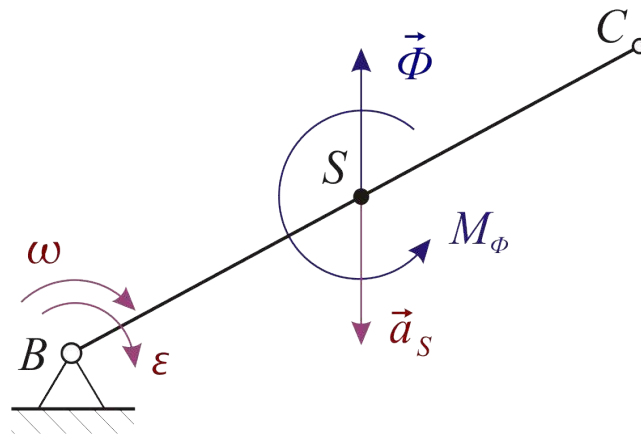


Рис. 2.43. Неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс

2.4.4. ПРИВЕДЕННЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

При использовании движения механизма, находящегося под действием заданных сил, удобно все силы, действующие на эти звенья, заменять силами, приложенными к одному из звеньев механизма. При этом необходимо, чтобы работа на рассматриваемом возможном перемещении или мощность, развиваемая заменяющими силами, были соответственно равны сумме работ или мощностей, развиваемых силами, приложенными к звеньям исследуемых механизмов.

Заменяющие силы, удовлетворяющие этим условиям, получили название *приведённых сил*. Звено механизма, к которому приложены приведённые силы, называется звеном приведения, а точка приложения приведённых сил называется *точкой приведения*. (Обычно за звено приведения выбирают то звено, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма.)

Например, для механизма, изображённого на рис. 2.44, вместо всего комплекса звеньев можно рассмотреть звено (кривошип AB), обобщенной координатой которого является угол φ .

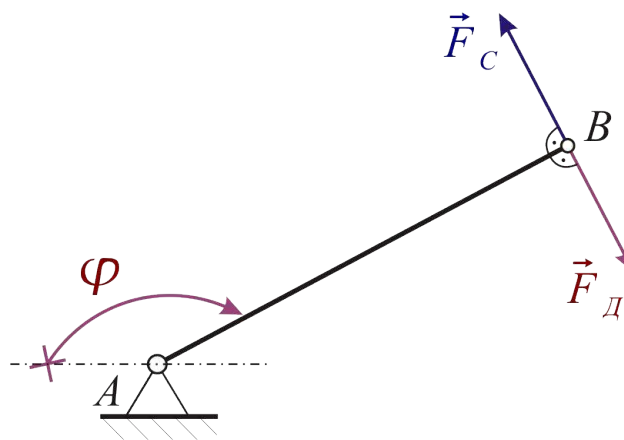


Рис. 2.44. К приведению механизма

В точке B приложены две приведённые силы:

\vec{F}_D - приведённая движущая сила;
 \vec{F}_C - приведённая сила сопротивления.

При этом \vec{F}_D должна производить работу A_D , равную работе всех движущих сил (или развивать мощность P_D , равную мощности всех движущих сил).

Сила \vec{F}_C производит работу A_C , равную работе всех сил сопротивлений (или развивать мощность P_C , равную мощности всех сил сопротивлений).

Для определения приведённых сил или их моментов мы будем использовать равенство:

$$P_n = \sum_{i=1}^k P_i, \quad (2.73)$$

где P_n - мощность, развиваемая приведённой силой или приведённым моментом; P_i - мощность, развиваемая силами или моментами, приведёнными к звену i и подлежащими определению.

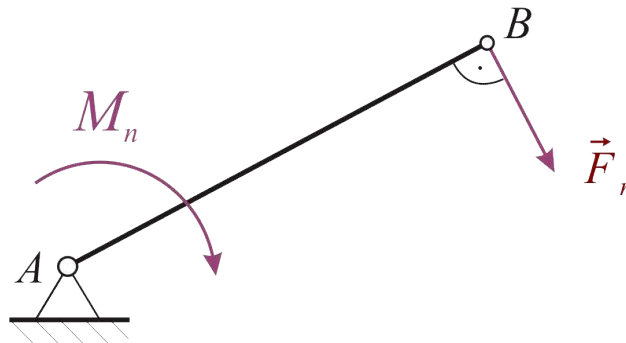


Рис. 2.45. К определению приведённого момента и приведённой силы механизма

Кроме того

$$P_n = F_n \cdot V_B = M_n \omega, \quad (2.74)$$

где F_n - величина приведённой к точке B (звена приведения) силы (может быть приведённой силой F_D или F_C); M_n - приведённый момент пары сил (может быть приведённым M_D или M_C); ω - угловая скорость звена приведения.

Приведённая сила и момент могут определяться по формулам:

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^k M_i}{V_B}; \quad M_n = \frac{\sum_{i=1}^k M_i}{\omega}; \quad \sum_{i=1}^k M_i = \sum_{i=1}^k F_i V_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^k M_i \omega_i, \quad (2.75)$$

где F_i, M_i - сила и момент, приложенный к звену i ;

V_i - скорость точки приложения силы F_i ;

ω_i - угловая скорость звена i ;

α_i - угол, образованный силой \vec{F}_i и \vec{V}_i .

Таким образом, приведённую силу и момент можно рассматривать как

$$F_n = \sum_{i=1}^k F_i \frac{V_i \cos \alpha_i}{V_B} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{V_B}; \quad (2.76)$$

$$M_n = \sum_{i=1}^k F_i \frac{V_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_{i=1}^k M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \quad (2.76')$$

2.4.5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЗМА

Уравнение кинетической энергии механизма имеет вид:

$$A_D - A_C = T - T_0. \quad (2.77)$$

Как было показано выше, все движущие силы можно заменить одной приведённой силой F_D , приведённой к выбранному звену приведения AB в точке B . Точно так же можно все \vec{F}_C заменить одной \vec{F}_n , приложенной к этому же звену в точке B . Моменты сил движущих и сил сопротивления также можно заменить приведёнными и моментами на валу A , см. рис. 2.45.

$$A_{F_D} - A_{F_C} = \sum \frac{J \omega^2}{2} - \sum \frac{J \omega_0^2}{2}, \quad (2.78)$$

где A_{F_D} - работа приведённой силы F_D ;

A_{F_C} - работа приведённой силы F_C ; $J, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ - момент инерции механизма относительно оси вращения, или

$$\frac{J \omega^2}{2} - \frac{J \omega_0^2}{2} = \int_0^\varphi M_n d\varphi, \quad (2.79)$$

где $M_n, \text{ Н} \cdot \text{м}$ - суммарный приведенный момент;

$\varphi, \text{ рад}$ - величина углового перемещения.

Рассмотрим вопрос о том, как может быть определена кинетическая энергия механизма. В общем случае кинетическую энергию плоскопараллельного движения звена можно представить в виде суммы энергий в поступательном вместе с центром масс и вращательного вокруг его центра масс движениях. Поэтому для механизма можно записать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i V_i^2 + J_i \omega_i^2), \quad (2.80)$$

где m_i - масса i -звена, V_i - скорость его центра масс; J_i - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, ω_i - его угловая скорость.

Кинетическая энергия звена, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m V_s^2}{2}. \quad (2.81)$$

Для звена, имеющего вращательное движение:

$$T = \frac{J \omega^2}{2}, \quad (2.82)$$

где J - момент инерции звена, относительно оси вращения.

Для звена, имеющего сложное плоскопараллельное движение,

$$T = \frac{J_p \omega^2}{2}, \quad (2.83)$$

где J_p - момент инерции звена относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения p ; ω - мгновенная угловая скорость;

$$J_p = J_s + m l_{ps}^2.$$

В последнем выражении l_{ps} - расстояние от оси вращения до центра масс;

J_s - момент инерции относительно центра масс. С учётом $V_s = \omega \cdot l_{ps}$:

$$T = \frac{J_s \omega^2}{2} + \frac{m V_s^2}{2}. \quad (2.84)$$

2.4.6. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА И ПРИВЕДЁННЫЙ МОМЕНТ МЕХАНИЗМА

Механизм с одной степенью свободы имеет только начальное звено, которое может быть выбрано за звено приведения.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m V_i^2 + J_i \omega_i^2) \times \frac{V_B^2}{V_B^2};$$

$$T = \frac{V_B^2}{2} \left[m_1 \left(\frac{V_1}{V_B} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{V_B} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_2}{V_B} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{V_B} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{V_n}{V_B} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{V_B} \right)^2 \right], \quad (*)$$

где V_1, V_2, \dots, V_n - скорости центров масс звеньев; V_B - скорость точки приведения.

В этом выражении $T = f(V_B)$. Кинетическую энергию можно выразить в $T = f(\omega)$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m V_i^2 + J_i \omega_i^2) \times \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2};$$

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \left[m_1 \left(\frac{V_1}{\omega_1} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_2}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{V_n}{\omega_1} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 \right], \quad (**)$$

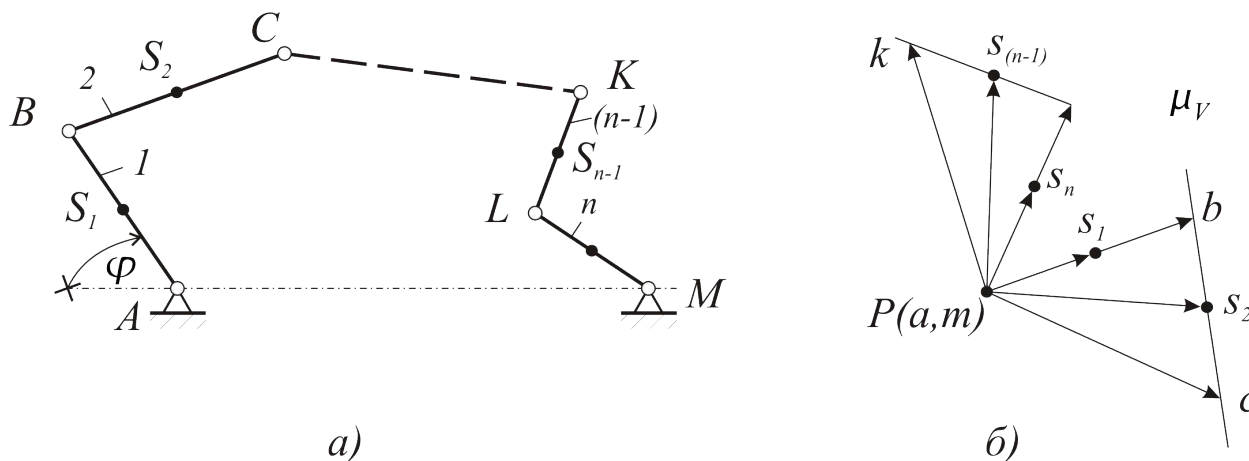


Рис. 2.46. К расчёту приведенной массы и приведённого момента механизма:
а) кинематическая схема механизма; б) план его скоростей

Обозначим величину, стоящую в скобках (*), через m_n , величину в скобках (**), как J_n , тогда будем иметь

$$m_n = m_1 \left(\frac{V_1}{V_B} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{V_B} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_2}{V_B} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{V_B} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{V_n}{V_B} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{V_B} \right)^2 \quad \text{и}$$

$$J_{np} = m_1 \left(\frac{V_1}{\omega_1} \right)^2 + J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_2}{\omega_1} \right)^2 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \dots + m_n \left(\frac{V_n}{\omega_1} \right)^2 + J_n \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2.$$

Таким образом, m_{np} - представляет собой некоторую условную величину, сосредоточенную в точке B, а J_{np} - приведённый к звену AB момент инерции звеньев механизма.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i V_i^2 + J_i \omega_i^2) = \frac{V_B^2}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_i}{V_B} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{V_B} \right)^2 \right] = \frac{m_n V_B^2}{2} \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i V_i^2 + J_i \omega_i^2) = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_i}{\omega_1} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right] = \frac{J_n \omega_1^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{m_n V_B^2}{2} = \frac{J_n \omega_1^2}{2}, \text{ и с учётом } V_B = \omega_1 l_{AB}, V_B^2 = \omega_1^2 \cdot l_{AB}^2:$$

$$m_n = \frac{J_n}{l_{AB}^2}. \quad (2.85)$$

Приведённая масса и приведённый момент инерции J_n могут быть выражены через соответствующие отрезки планов скоростей

$$\begin{aligned} V_1 &= (ps_1) \cdot \mu_V, \\ V_B &= (p\epsilon) \cdot \mu_V, \\ \omega_1 &= \mu_V \cdot \frac{(a\epsilon)}{l_{AB}} \dots \end{aligned} \quad (2.86)$$

2.4.7. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СИЛОВОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМА

Силовой анализ механизмов состоит в определении сил взаимодействия звеньев механизма, т. е. определении реакции в кинематических парах.

Вопрос об определении сил, действующих на каждое звено в каждой кинематической паре, имеет большое практическое значение для расчета на прочность отдельных звеньев и деталей, для определения сил трения в кинематических парах, для расчета износа трущихся элементов кинематических пар, для определения энергии, потребной для работы механизма, и т. д.

Обычно при решении данной задачи считают заданными:

- основные размеры звеньев;
- массы и моменты инерции звеньев;
- закон движения одного звена для механизма с одной степенью подвижности или нескольких звеньев для механизмов с соответствующим числом степеней свободы. Причем если исследуется реальный механизм, то этот закон может быть определен точно опытным путем. Для проектируемого механизма обычно известен лишь желаемый закон движения входного звена.

Считаются заданными и внешние силы, и моменты, приложенные к различным звеньям механизма.

Однако так как под действием этих сил механизм должен двигаться по заданному закону, то нельзя задавать все силы, приложенные к звеньям механизма. Часть этих сил должна определяться из условия обеспечения требуемого закона движения.

Силы или моменты сил, которые следует приложить к механизму, чтобы обеспечить заданный закон движения, называются уравновешивающими силами или моментами.

Для уравновешивающей силы P_y следует указать точку приложения и линию действия.

Для уравновешивающего момента M_y – звено, к которому он приложен.

При силовом расчете звено, к которому приложена уравновешивающая сила или момент, называется начальным.

Это следует иметь в виду при определении последовательности силового расчета механизмов.

Требуется определить:

1. реакции во всех кинематических парах;
2. уравновешивающую силу или уравновешивающий момент.

Силовой расчет механизмов может быть осуществлен различными методами.

В инженерной практике наибольшее распространение получил кинетостатический метод расчета, при котором уравнения динамики придают форму уравнений статики.

Такая операция осуществляется с помощью применения принципа кинетостатики (принципа Даламбера), который читается следующим образом:

«Если ко всем силам (задаваемым и реакциям связей), действующим на одно звено или на несколько звеньев механизма, добавить силы инерции, развиваемые этими звеньями, то полученная система сил будет находиться в равновесии».

Таким образом, чтобы применить кинетостатический метод расчета, нужно уметь подсчитывать и прикладывать силы инерции звеньев.

2.4.8. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМА

Изучив этот параграф, студент должен знать, как подсчитывать и прикладывать силы инерции звеньев механизма.

Силой инерции $\vec{\Phi}_i$ материальной точки называется произведение массы m_i точки на ее ускорение a_i .

Направлена сила инерции в сторону, противоположную ускорению точки, т. е.

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \cdot \vec{a}_i. \quad (2.87)$$

Звено механизма является совокупностью отдельных материальных точек, ускорения которых в общем случае различны.

При расчетах, связанных с определением реакций в кинематических парах, можно перейти от системы распределенных сил к сосредоточенным силам.

Таким образом, нужно знать, к чему приводится в общем случае система элементарных сил инерции.

Из курса теоретической механики известно, что в общем случае система элементарных сил инерции звена приводится к главному вектору и к главному моменту сил инерции.

Модуль главного вектора $\vec{\Phi}$ сил инерции звена равен произведению массы m звена на ускорение a_s его центра масс; линия действия главного вектора сил инерции проходит через центр масс звена; направление его противоположно направлению ускорения центра масс.

$$\vec{\Phi} = -m \cdot a_S. \quad (2.88)$$

В плоских механизмах звенья обычно имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения.

Для таких звеньев главный момент M_ϕ сил инерции звена равен произведению углового ускорения ε на его момент инерции I_S относительно оси, проходящей через центр масс звена перпендикулярно плоскости движения; направлен главный момент сил инерции звена в сторону, противоположную направлению углового ускорения звена

$$M_\phi = -I_S \cdot \varepsilon. \quad (2.89)$$

Так как в плоских механизмах положения плоскостей поворота звеньев остаются неизменными, то в уравнении (2.89) можно считать M_ϕ и ε величинами алгебраическими.

На рис. 2.47 показаны силы инерции звена в виде главного вектора $\vec{\Phi}$ и главного момента M_ϕ .

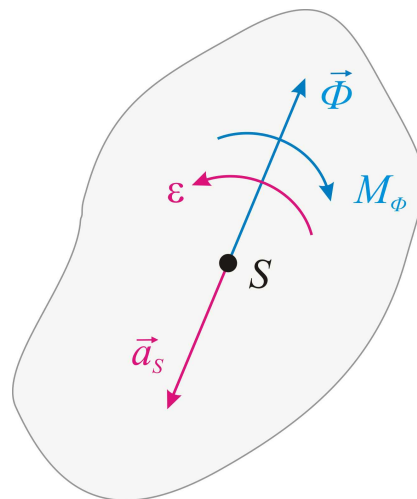


Рис. 2.47. Силы инерции звена

В случае плоского движения главный вектор $\vec{\Phi}$ и главный момент M_ϕ сил инерции звена можно заменить равнодействующей силой Φ , которая по модулю равна главному вектору сил инерции звена, но линия действия которой смещена на расстояние h относительно центра масс:

$$h = \frac{M_\phi}{\Phi}. \quad (2.90)$$

(Для этого главный момент M_ϕ представляют в виде пары сил, у которой силы равны Φ , и складывают их с главным вектором $\vec{\Phi}$ сил инерции звена.) Плечо h откладывают от центра масс звена перпендикулярно ускорению центра масс таким образом, чтобы равнодействующая сил инерции, приложенная к концу плеча, давала момент относительно центра масс в

направлении, противоположном направлению углового ускорения звена (рис. 2.48).

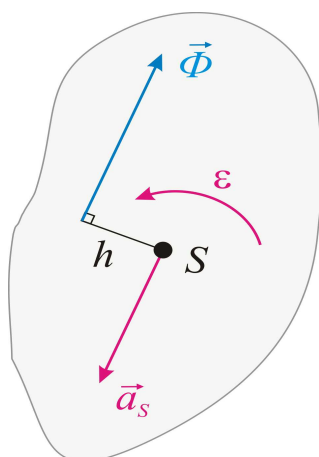


Рис. 2.48. Плоское движение звена

Если звено совершает поступательное движение, то его угловое ускорение $\epsilon=0$ и $M_\phi=0$.

Следовательно, в случае поступательного движения звена его силы инерции приводятся к одной силе инерции $\vec{\Phi} = -m \cdot a_S$, линия действия которой проходит через центр масс звена (рис. 2.49).

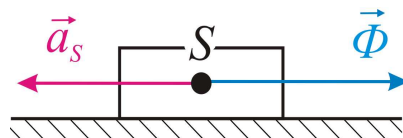


Рис. 2.49. Поступательное движение звена

Если звено совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс звена, то $a_S=0$ и $\Phi=0$.

Главный момент сил инерции звена $M_\phi=0$, если $\epsilon=0$.

Если $\epsilon \neq 0$, то силы инерции звена приводятся к главному моменту $M_\phi = -I_S \cdot \epsilon$ (рис. 2.50).

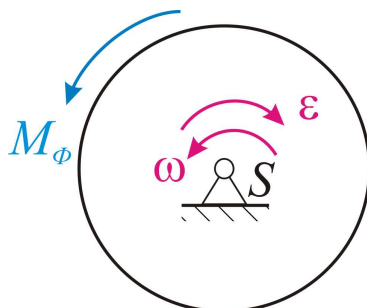


Рис. 2.50. Вращательное движение звена относительно центральной неподвижной оси

При вращении звена вокруг оси, не проходящей через центр масс звена, в общем случае $\Phi \neq 0$, $M_\phi \neq 0$.

Эти силы инерции можно приложить так, как показано на рис. 2.51, а и б.

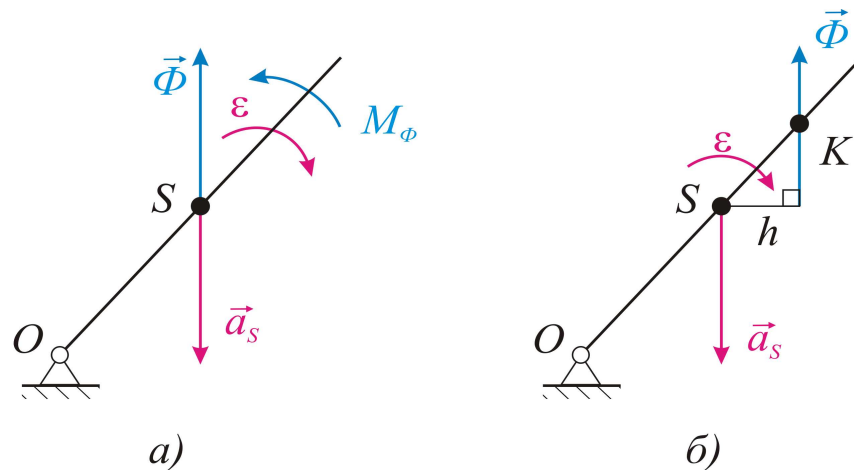


Рис. 2.51. Вращательное движение звена относительно неподвижной оси, не проходящей через центр масс

Точка K пересечения линии действия равнодействующей сил инерции звена с осевой линией звена (рис. 2.51) называется центром качения звена или центром удара.

$$h = \frac{M_{\phi}}{\Phi}. \tag{2.91}$$

Положение центра удара в ряде случаев имеет существенное значение.

Например, при проектировании дробилок стараются использовать силы инерции для совершения полезной работы.

Если звено не имеет плоскости симметрии (рис. 2.52), параллельной плоскости движения, то главный вектор сил инерции звена определяют по той же формуле (2.87).

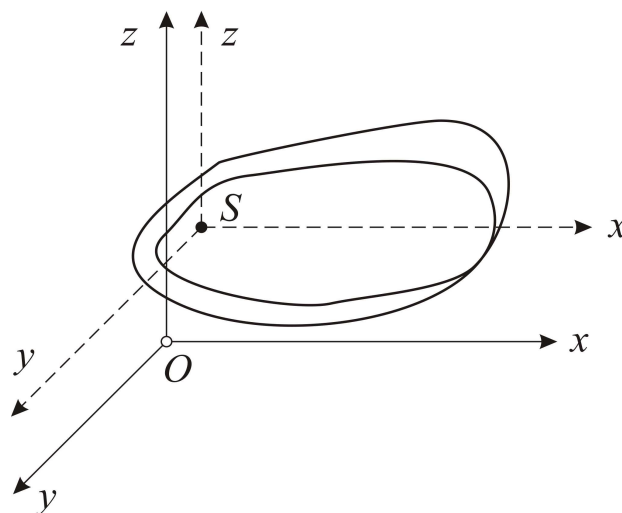


Рис. 2.52. К определению главного вектора для звена без плоскости симметрии

Главный момент M_{ϕ} сил инерции такого звена будет определяться не одной проекцией $M_{\phi z} = -I_S \cdot \epsilon$, а тремя проекциями на оси Sx, Sy, Sz ,

проходящими через центр масс звена параллельно осям Ox, Oy, Oz (см. рис. 2.52).

$$\begin{cases} M_{\phi_x} = -\omega^2 \cdot I_{yz} + I_{zx} \\ M_{\phi_y} = \omega^2 \cdot I_{zx} + I_{zy} \\ M_{\phi_z} = -\varepsilon \cdot I_z \end{cases}, \quad (2.92)$$

где I_{zx}, I_{yz} - центробежные моменты инерции звена соответственно относительно осей Sz и Sx, Sz и Sy .

РАЗДЕЛ III. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

3.0. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции таким образом, чтобы он без риска разрушиться или исказить форму сопротивлялся воздействию внешних сил. Основания для правильного решения данной задачи дает инженеру наука о *сопротивлении материалов*. Данная наука изучает поведение различных конструкций при действии на них сил и указывает, как подобрать материал для данной конструкции и поперечные размеры при условии полной надежной работы и наибольшей дешевизне конструкции.

3.0.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ

При работе сооружений и машин их части воспринимают внешние нагрузки и действие их передают друг другу. Например: опора ЛЭП воспринимает собственный вес, ветровую нагрузку, давление удерживаемых проводов и передает эти силы на основание (фундамент). В сопротивлении материалов подразумевается следующее положение: если говорят, что к той или иной части конструкции приложена внешняя сила, то мы под этим термином подразумеваем передачу давления (движения) на рассматриваемую часть от окружающей среды или от соседних частей конструкции. Классификацию сил можно провести по нескольким признакам.

1) По *характеру приложения* нагрузки делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*.

Сосредоточенными считают силы, обуславливающие передачу давления на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами самого элемента.

Распределенными считают силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади конструкции. Данные силы характеризуются *интенсивностью* нагрузки: то есть величиной нагрузки (силы), приходящейся на единицу длины (погонная нагрузка) q , $[Н/м]$, или площади p , $[Н/м^2]$. Распределенные нагрузки в зависимости от того, по какому закону меняется интенсивность распределения, могут быть *равномерно распределенными* и *неравномерно распределенными*.

2) По *характеру действия* нагрузки делятся на *статические* и *динамические*.

Статическими нагрузками считаются такие силы, которые прикладываются к элементу конструкции в течение значительного интервала времени. Как правило, в процессе эксплуатации конструкции они остаются постоянными или меняются незначительно. При передаче статических нагрузок на конструкцию ускорения элементов в ней отсутствует или весьма малы.

Динамическими нагрузками считаются такие силы, которые прикладываются к конструкции за короткий промежуток времени, что обусловлено и обуславливает значительные ускорения её элементов. Динамические нагрузки могут быть *внезапно приложенными, ударными и знакопеременными*.

3.0.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Под *внутренними силами* в сопромате понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под воздействием внешних сил (см. гипотеза о ненапряженном начальном состоянии).

В случае произвольной пространственной системы сил, для деформируемого тела, например бруса (рис. 3.1), в произвольном поперечном сечении внутренние усилия будут представлены в виде: внутренних поперечных сил Q_y, Q_z ; внутренней продольной силы N ; изгибающих моментов M_y, M_z ; крутящего момента $M_{кр}$. Для их определения применяется *метод сечений*.

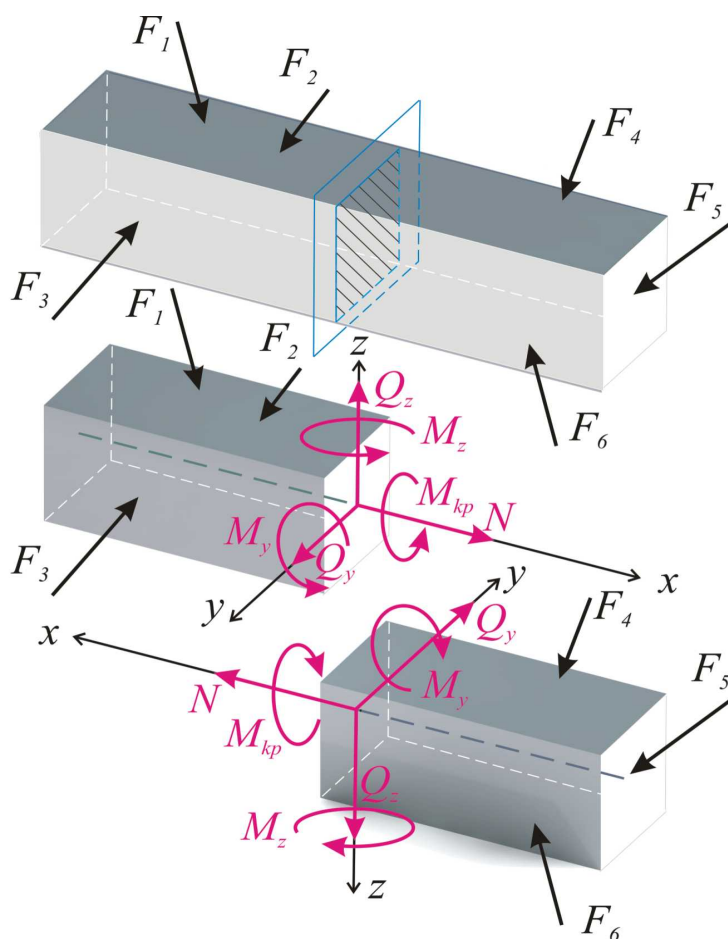


Рис. 3.1. Внутренние усилия в исследуемом поперечном сечении

Для его обоснования рассмотрим брус, изображённый на рис. 3.1.

Загружаем его произвольной системой внешних сил F_1, \dots, F_n . В поперечном сечении, где требуется определить внутренние усилия, проводим секущую плоскость, разделяем брус на левую и правую часть. Правая часть находится в равновесии, значит, внешние силы, приложенные к ней, уравниваются внутренними усилиями, действующими на правую часть. Но те же внешние силы уравниваются и нагрузками, приложенными к левой части, так как целый стержень также находится в состоянии равновесия. Следовательно, нагрузки, приложенные к левой части стержня, и внутренние усилия, действующие на правую часть, статически эквивалентны друг другу. Таким образом, проекция на любую ось внутренних усилий в сечении, действующих со стороны левой части стержня на правую, равна проекции на эту ось всех внешних сил, приложенных к левой части. Аналогично, момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении, действующих со стороны левой части стержня на правую, равен моменту всех внешних сил, приложенных к левой части, относительно этой оси. Отметим, что из шести внутренних усилий, действующих в поперечном сечении стержня, проекции пяти усилий на каждую ось x, y, z равны нулю. По аналогии равны нулю и моменты пяти внутренних усилий относительно каждой из x, y, z осей. Это позволяет определять внутренние усилия в стержнях, проецируя на одну из осей x, y, z все внутренние усилия, действующие на правую часть стержня, и все внешние силы, приложенные к левой части, или определяя их моменты относительно одной из x, y, z осей. Таким образом, внутренние силы, действующие в сечении со стороны левой части на правую, можно определить по внешним силам, приложенным не к левой, а к правой части. В этом случае полученные направления проекций внешних сил на выбранные оси и моментов относительно этих осей необходимо изменять на противоположные.

Механическое *напряжение* (далее - просто *напряжение*) характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении, и определяется по формуле:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (3.1)$$

где ΔR - равнодействующая внутренних сил на весьма малой площадке ΔA проведенного сечения.

По своей сути $\vec{p} = \vec{\tau} + \vec{\sigma}$, где τ - касательные напряжения, а σ - нормальные напряжения. Необходимо отметить, что величины напряжений τ и σ в каждой точке элемента зависят от направления сечения, проведенного через эту точку.

Совокупность напряжений τ и σ , действующих по различным площадкам, проходящим через данную точку, представляет собой *напряженное состояние* в этой точке.

Деформация – как явление представляет собой изменение размеров под влиянием нагрузки. В общем виде, по характеру перемещения материала,

деформация бывает *линейной* ε и *угловой* γ (*относительный сдвиг*).

Совокупность линейных ε по направлениям и угловых γ деформаций по различным плоскостям представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.

Классифицировать разновидности деформаций можно с помощью оценки в рассматриваемом сечении шести силовых факторов Q_i, M_i, N_i . В зависимости от их наличия и сочетания, по спецификации сопромата деформация может представлять собой растяжение-сжатие, изгиб, сдвиг, кручение или быть сложной.

В контексте «Сопротивление материалов» решение многих задач не является абсолютно строгим, т.е. деформационные явления рассматриваются с учетом некоторых упрощений (допущений).

Основные гипотезы и допущения.

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Считается, что материал полностью занимает рассматриваемый объем, т.е. не принимается во внимание дискретность структур вещества на уровне атомов и т.д.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Считается, что свойства материала одинаковы в любых точках и в каждой точке по любым направлениям. Данная гипотеза неприемлема при рассмотрении материалов с ярко выраженной анизотропией (древесина и т.д.).

3. *Гипотеза о малости деформаций (Гипотеза относительной жесткости материала).* Считается, что рассматриваемые деформации малы по отношению к размерам деформируемого тела. На этом основании изменениями в расположении приложенных внешних сил по отношению к отдельным частям тела при деформации пренебрегают. Это допущение позволяет использовать уравнения статики недеформированного тела также и для тела после деформации.

4. *Гипотеза о совершенной упругости материала.* Все тела считаются абсолютно упругими. Применение данной гипотезы позволяет использовать формулы сопромата вплоть до значений напряжений, при которых начинает наблюдаться значительный рост пластических деформаций.

5. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.* Считается, что для большинства материалов справедлив закон Гука, устанавливающий прямую пропорциональную зависимость между деформациями и нагрузками. На основании этой гипотезы при решении большинства задач сопротивления материалов применяется *принцип суперпозиции*. Т.е. усилия в любом элементе конструкции, вызванные несколькими факторами ($\sum F, \Delta t$), равны сумме усилий, вызванных каждым из этих факторов, и не зависят от порядка (очередности) их приложения. Данное положение справедливо и в отношении деформаций, возникающих от действия этих нагрузок.

6. *Гипотеза плоских сечений (Гипотеза Бернулли).* Считается, что сечения плоские и нормальные к оси стержня, до приложения нагрузки, остаются плоскими и нормальными к оси и в процессе его деформирования при действии нагрузок.

3.1. ДЕФОРМАЦИЯ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Центральным растяжением – сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только внутренняя продольная сила N_i , действующая вдоль продольной оси бруса. Все остальные внутренние усилия равны нулю.

Продольная сила N , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и связана с нормальными напряжениями зависимостью:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA, \quad (3.2)$$

где σ - нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dA ; A - площадь поперечного сечения. Произведение $\sigma \cdot dA = dN$ представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dA .

Для нахождения продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса используется универсальный метод сечений.

Величина продольного усилия N_i в произвольном поперечном сечении стержня определяется алгебраической суммой всех внешних сил, действующих на стержень, по одну сторону от этого сечения

$$N_i = \sum_{\text{слева}} P_i = \sum_{\text{справа}} P_j, [H]. \quad (3.3)$$

Внутренняя сила N_i может вызывать либо растяжение, либо сжатие стержня. Если внешнее продольное усилие $P_{i,j}$ направлено от рассматриваемого сечения, то внутренняя продольная сила N_i считается положительной (деформация растяжения), и если $P_{i,j}$ направлено к сечению, то внутренняя продольная сила $N_{i,j}$ считается отрицательной (деформация сжатия).

Для выполнения прочностных расчетов, помимо внутренней продольной силы, находят значения нормальных напряжений, действующих в поперечных сечениях по всей длине бруса.

Если стержень состоит из i^x участков, то нормальные напряжения на каждом участке определяются по формуле:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}, \left[\frac{H}{M^2} \right] \text{ или } [Па], \quad (3.4)$$

где N_i и A_i - внутренняя нормальная сила и площадь поперечного сечения i -го участка стержня.

Условие прочности при растяжении-сжатии, рассчитываемое по наибольшим допускаемым нормальным напряжениям, может быть сформулировано следующим образом:

Действительное максимальное напряжение σ_{max} в растянутом (сжатом) стержне не должно превышать определенной величины так называемого допускаемого напряжения $[\sigma]$, принимаемого для материала стержня и данных нагрузок постоянной величиной.

$$\sigma_{max} = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma]. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.5) называют *условием прочности* при деформации центрального растяжения-сжатия.

Рассмотрим деформационные характеристики данного вида сопротивления.

Абсолютным удлинением (или *абсолютной продольной деформацией*) называется величина Δl , на которую удлиняется стержень, под воздействием продольной силы. Измеряется в $[м, см, мм]$.

Относительным удлинением (или *относительной продольной деформацией*) называется величина ε , равная отношению абсолютного удлинения Δl стержня к первоначальной длине стержня l . Является мерой пластичности материала.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.6)$$

Абсолютной поперечной деформацией называется величина Δb изменения поперечного размера стержня под воздействием продольной силы. Измеряется в $[м, см, мм]$.

Относительной поперечной деформацией называется величина ε' , равная отношению абсолютной поперечной деформации к первоначальному поперечному размеру стержня.

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (3.7)$$

Также как ε , является мерой пластичности материала. Величина безразмерная.

Опытным путем было установлено, что в случаях напряжений в материале стержня, не превышающих предела пропорциональности между ε и ε' , существует зависимость:

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon, \quad (3.8)$$

где μ называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона* и представляет собой модуль отношения относительной поперечной деформации к продольной:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.9)$$

Величина безразмерная.

Опытным путем было установлено, что в случаях напряжений в материале стержня, не превышающих предела пропорциональности, относительное удлинение равно:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}, \quad (3.10)$$

здесь E - *модуль продольной упругости*, или *модуль упругости первого рода*. Постоянная, характеризующая свойства материала стержня.

Так как $\sigma = \frac{N}{A}$, то

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.11)$$

Отсюда можно выразить

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (3.12)$$

Используя выражения (3.6) и (3.10), абсолютное удлинение стержня, состоящего из одного участка, можно выразить как

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \quad (3.13)$$

Выражения 3.12-3.13 носят название *закона Р. Гука для деформации растяжения-сжатия* (1660 г.):

Деформация бруса при растяжении-сжатии прямо пропорциональна нормальным напряжениям, действующим в его поперечных сечениях.

Произведение EA - называется *жесткостью поперечного сечения при растяжении и сжатии*.

3.1.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ И НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

График, показывающий закон изменения продольной силы по длине стержня, называется *эпюрой продольных сил* $N(x)$.

Построение эпюры продольных внутренних сил N_i осуществляется следующим образом. Вначале выполняют построение данной схемы нагружения конструкции ступенчатого стержня продольными силами.

При этом необходимо руководствоваться целесообразностью горизонтальной ориентации схемы.

Внизу, непосредственно под схемой, на расстоянии, исключающем наложение данных расчетной схемы и элементов предполагаемой эпюры продольных сил, проводят нулевую линию предполагаемой эпюры продольных сил, а под самой эпюрой продольных внутренних сил аналогично оставляют место для возможно необходимого построения эпюры напряжений. При использовании такого подхода достигается наглядность и взаимосвязь графических и расчетных данных. С целью достижения большей наглядности при построении аналитические выкладки желательно производить на следующей странице.

Далее производится определение границ расчетных участков. Основными критериями при определении границ участков являются:

- 1) Наличие в поперечном сечении стержня точки приложения продольной силы.
- 2) Наличие в поперечном сечении стержня изменения (перехода) размера (формы) поперечного сечения.

Затем производят разбиение ступенчатого стержня на участки. Разбиение производится проведением вертикальных линий через положения поперечных сечений границ участков таким образом, чтобы и расчетная схема, и нулевая линия предполагаемой эпюры продольных сил были пересечены этими линиями. Подсчитаем общее число установленных расчетных участков.

Участками считаются элементы стержня, заключенные между проведенными границами. После предварительных графических построений приступаем непосредственно к аналитическому расчету. Анализируя расчетную схему, индексируем данные участки. В случаях, если рассматриваемый стержень представляет собой консоль, то индексацию проводим таким образом, чтобы первый участок был ближайшим к свободному концу стержня. Определяем внутренние усилия для каждого участка в отдельности, начиная с участка с наименьшим индексом ($1 \dots n$). Для определения внутреннего усилия на участке используем метод сечений, формулу 3.4 и соответствующее правило знаков. С этой целью последовательно производим n сечений в пределах $1 \dots n$ участков. Каждое подсчитанное по формуле 3.4 значение N_i на участке i отображаем соответственно на эпюре продольных сил. При этом если $N_i > 0$, то на границах данного участка откладываем отрезки, равные значению поперечных сил, в относительном масштабе вверх от нулевой линии, соединяем концы отрезков линией, параллельной нулевой, и производим поперечную штриховку.

Для наглядности маркируем полученную площадь соответствующим знаком \oplus . Если же $N_i < 0$, то отрезки откладываются вниз, а полученная площадь маркируется знаком \ominus .

Графическое отображение закона распределения нормальных напряжений

в поперечном сечении бруса называется *эпюрой нормальных напряжений* σ поперечного сечения. Выражение (3.2) может быть удовлетворено при бесконечно большом числе эпюр напряжений.

Проведем следующий опыт: возьмем резиновый брус, с параллельными полосами, нанесенными краской через равные промежутки, расположенными как вдоль оси бруса, так и поперек. Прикладывая к брусу растягивающее усилие, убеждаемся в том, что в деформированном состоянии, параллельность соответствующих линий сохраняется (гипотеза Бернулли). Если мысленно произвести разметку данного бруса на элементарном уровне, то по аналогии можно заключить, что характер элементарных деформаций будет адекватен характеру макродеформаций. То есть абсолютные деформации элементарных волокон во всех точках поперечного сечения будут одинаковыми. Соответственно, это позволяет рассматривать в выражении (3.2) σ как постоянную величину, то есть

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A, \text{ отсюда } \sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.14)$$

Таким образом, в поперечных сечениях бруса при центральном растяжении – сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Графическое отображение закона распределения нормальных напряжений по длине стержня называется эпюрой нормальных напряжений $\sigma_i(x)$. Для её построения делаем следующее. Отступив вниз от эпюры внутренних продольных сил N_i на расстояние, исключающее наложение данных, проводим нулевую линию, параллельную нулевой линии эпюры N_i и соответственно параллельную оси стержня на расчетной схеме. Продлеваем вертикальные линии границ участков несколько далее их пересечения с нулевой линией предполагаемой эпюры напряжений σ_i . Определяем напряжения для каждого участка в отдельности, начиная с участка с наименьшим индексом (1...n). Для определения нормальных напряжений на участках используем формулу 3.4, применяя ее к уже определенным значениям продольных усилий на каждом отдельном участке. Очевидно, каждому i -му участку с N_i внутренним продольным усилием будет соответствовать напряжение σ_i . Необходимо отметить, что на величину нормальных напряжений i -го участка влияет не только величина внутреннего усилия N_i , но и размер поперечного сечения A_i . Построение эпюры нормальных напряжений $\sigma_i(x)$ производится параллельно с аналитическим расчётом.

Подбор поперечного сечения стержня производится следующим образом. Определяется наиболее опасный участок, т.е. участок, на котором $|\sigma_i|$ имеет максимальное значение. Далее используется формула (3.5), при этом выбранное значение σ ассоциируется с σ_{max} и принимается во внимание заданная величина допускаемого напряжения $[\sigma]$. Если стержень состоит из разнородных материалов, то величина допускаемого напряжения должна быть

выбрана в соответствии с допусковым напряжением $[\sigma_i]$ для материала рассматриваемого i -го опасного участка.

Пример 3.1

Ступенчатая консоль (рис. 3.2) нагружена системой продольных сил. Построить эпюры: внутренних продольных сил, нормальных напряжений, абсолютных удлинений. Выполнить проверочный расчёт на прочность, если допусковое напряжение для материала стержня $[\sigma]=100 \text{ МПа}$, а $E=200 \text{ ГПа}$. Весом стержня пренебречь.

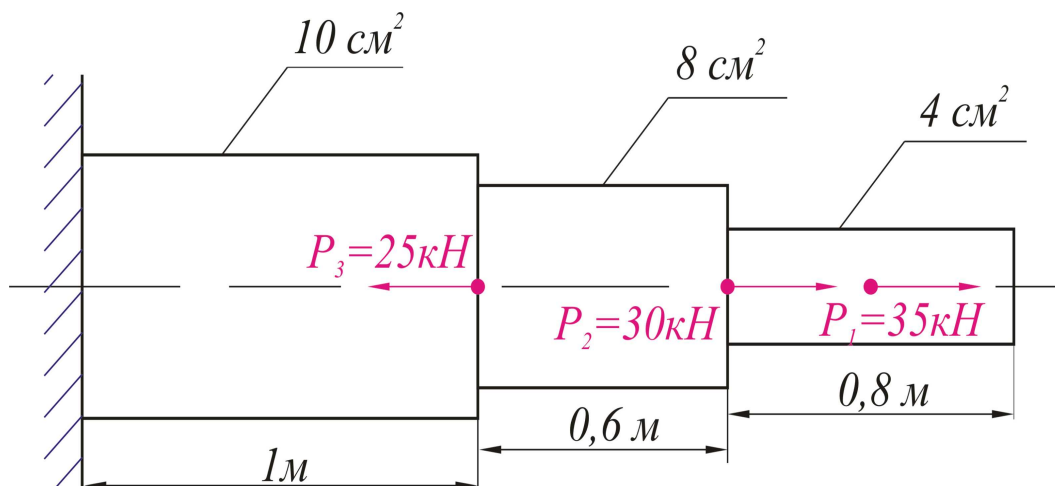


Рис. 3.2. К примеру 3.3

Решение

Для решения этой задачи применим универсальный метод сечений.

В данном случае целесообразно использовать *метод сечения справа*. Разобьем консоль на участки. Всего у нас будет 4 участка. пронумеруем их справа-налево (в соответствии с выбранным методом сечения справа). В произвольных местах выбранных участков, в их пределах проведём соответствующие поперечные сечения и рассмотрим каждый участок в отдельности.

Первый участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения $1-1$. В данном случае правее сечения $1-1$ отсутствуют продольные усилия, поэтому внутренняя сила, нормальное напряжение и удлинение этого участка равно нулю, т.е.:

$$N_1=0; \sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=0; \Delta l_1=0.$$

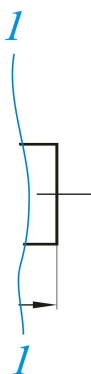
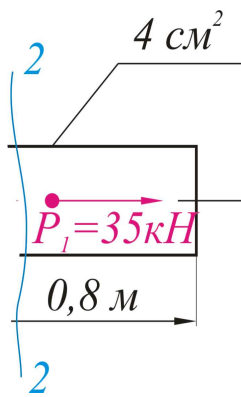


Рис. 3.3. К рассмотрению первого участка (пример 3.3)



Второй участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения 2-2. Точка приложения силы P_1 расположена правее сечения 2-2, поэтому данная сила войдет в уравнение продольных сил этого участка. Так как P_1 направлена от сечения 2-2, то она вызывает растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке:

$$N_2 = +P_1 = 35 \text{ kH} = \text{const}.$$

Рис. 3.4. К рассмотрению второго участка (пример 3.3)

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{35 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 87,5 \text{ МПа}.$$

Абсолютное удлинение второго участка:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,0175 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Третий участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения 3-3. Точки приложений сил P_1 и P_2 расположены правее сечения 3-3, поэтому данные силы войдут в уравнение продольных сил этого участка. Так как P_1 и P_2 направлены от сечения 3-3, то они вызывают растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке:

$$N_3 = +P_1 + P_2 = 35 + 30 = 65 \text{ kH} = \text{const}.$$

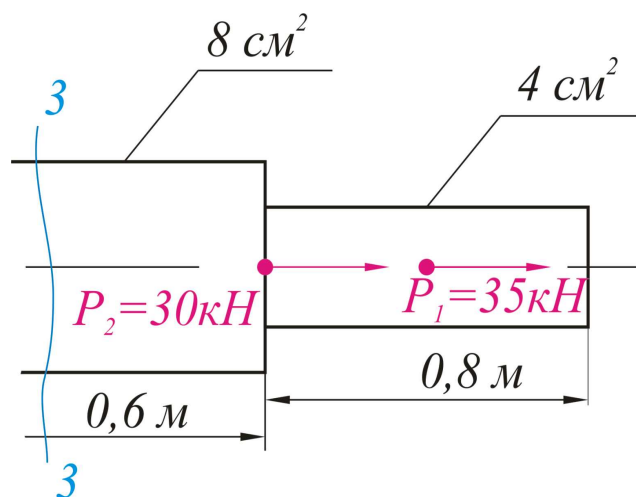


Рис. 3.5. К рассмотрению третьего участка (пример 3.3)

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{65 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 81,25 \text{ МПа}.$$

Абсолютное удлинение третьего участка:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{EA} = \frac{65 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,0244 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Четвёртый участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения 4-4. Точки приложений сил P_1 , P_2 и P_3 расположены правее сечения 4-4, поэтому данные силы войдут в уравнение продольных сил этого участка.

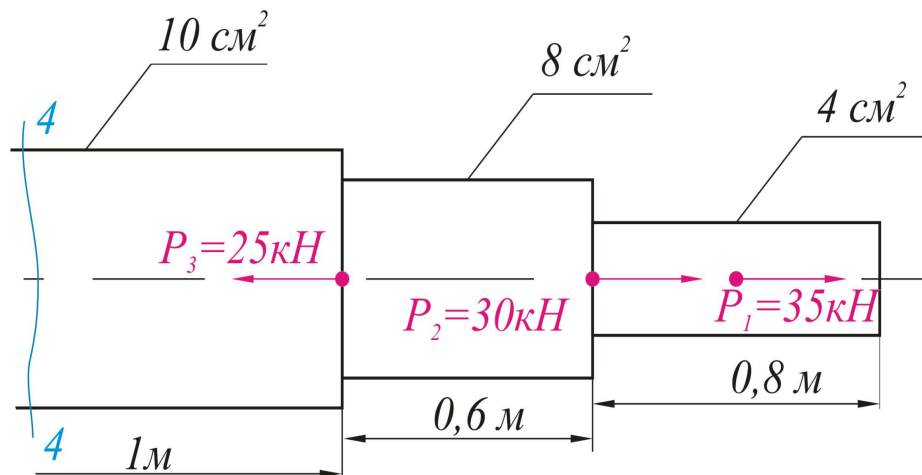


Рис.3.6. К рассмотрению четвёртого участка (пример 3.3)

Так как P_1 и P_2 направлены от сечения 4-4, то они вызывают растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке, а сила P_3 к сечению, и она вызывает сжимающее (отрицательное) внутреннее продольное усилие на участке:

$$N_4 = +P_1 + P_2 - P_3 = 35 + 30 - 25 = 40 \text{ кН} = \text{const}.$$

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 40 \text{ МПа}.$$

Абсолютное удлинение четвёртого участка:

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{EA} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,025 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

На основании данных расчёта выполняем построение соответствующих эпюр (рис. 3.7).

Из построенных эпюр видно, что наиболее опасным участком является второй, где нормальное напряжение достигает наибольшей по модулю величины $87,5 \text{ МПа}$.

Тем не менее, это напряжение не превосходит допускаемое, поэтому

делаем вывод о том, что стержень под действием нагрузок будет сохранять свою прочность.

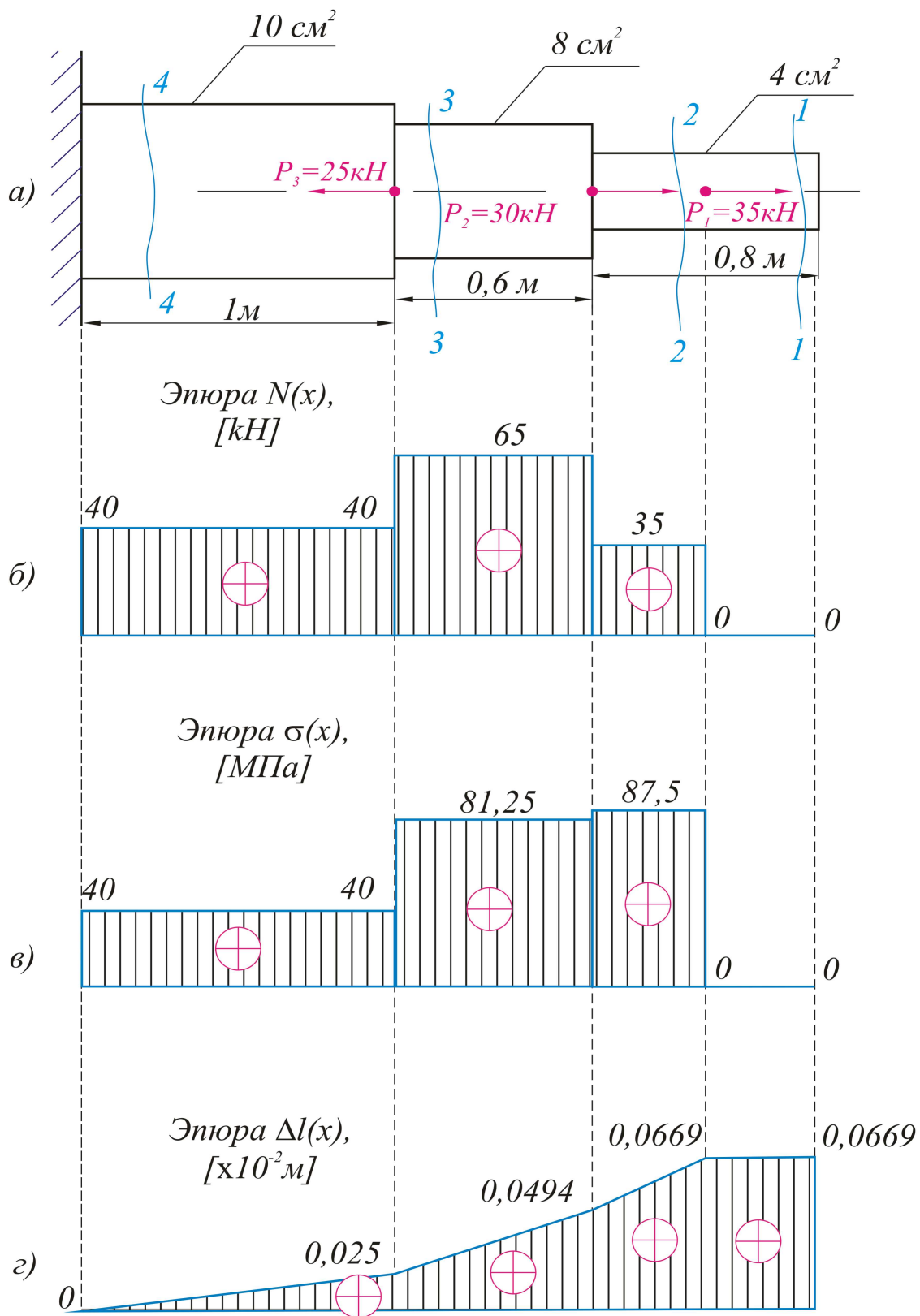


Рис. 3.7. К примеру 3.3: а) расчётная схема; б) эпюра внутренних продольных усилий; в) эпюра нормальных напряжений; г) эпюра абсолютных удлинений

3.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ

Возьмем стержень, в крайнем сечении приложим растягивающую центральную силу P (рис. 3.8). В произвольном месте стержня проведем поперечное сечение, а затем наклонное сечение под углом α к поперечному. Угол α считается положительным, если поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением необходимо повернуть на этот угол против часовой стрелки. Так как удлинения всех волокон, параллельных оси стержня при растяжении-сжатии, одинаковы, то можно предположить, что напряжения p во всех точках как наклонного, так и поперечного сечения одинаковы. Используя метод сечений, выделим фрагмент стержня, ограниченный наклонным сечением и крайним сечением, содержащим внешнюю нагрузку P . Очевидно, из условия равновесия следует, что напряжения p параллельны оси стержня и направлены в сторону, противоположную силе P , и что внутренняя сила

$$N_{\alpha} = pA_{\alpha},$$

где

$$A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha}. \quad (3.15)$$

В свою очередь, A - площадь поперечного сечения бруса, A_{α} - площадь наклонного сечения. Следовательно,

$$P = N_{\alpha} = pA_{\alpha} \Rightarrow p = \frac{P}{A_{\alpha}} = \frac{P \cos \alpha}{A} = \sigma \cos \alpha, \quad (3.16)$$

где $\sigma = \frac{P}{A}$ - нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня.

Возьмем элементарную площадку, лежащую в наклонном сечении f_{α} , с вектором p .

Разложим вектор p на составляющие $\vec{\sigma}_{\alpha}$ и $\vec{\tau}_{\alpha}$, используя формулу (3.16) и рисунок, определим, что их величины будут соотноситься как

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (3.17)$$

$$\tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.18)$$

Правило знаков напряжений при одноосном напряженном состоянии:

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении и отрицательным при сжатии. Касательное напряжение положительно, если изображающий вектор стремится повернуть тело относительно любой точки C , лежащей на внутренней нормали к сечению, по часовой стрелке.

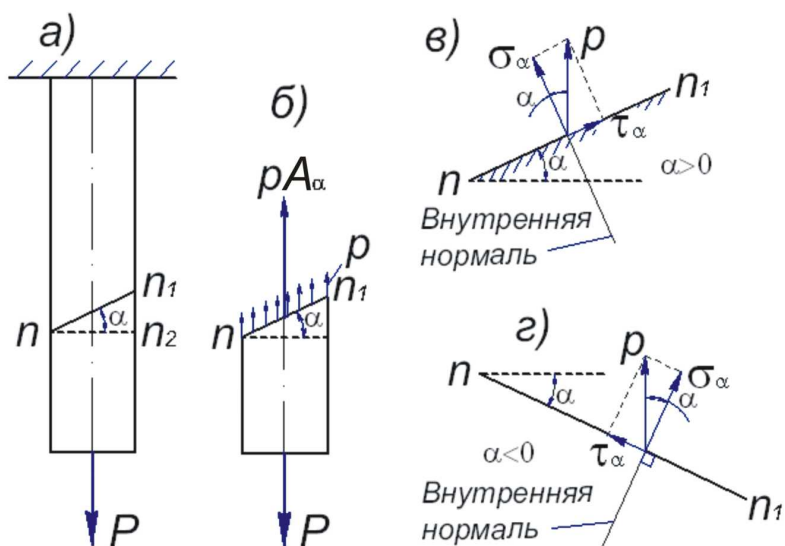


Рис. 3.8. Напряжения в наклонных сечениях при одноосном напряженном состоянии

Анализируя полученные формулы, можно сделать следующие выводы:

- 1) Наибольшие (по модулю) нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях стержня ($\alpha=0^\circ$), а наименьшие - в продольных сечениях ($\alpha=\pm 90^\circ$).
- 2) Наибольшие (по модулю) касательные напряжения возникают в наклонных сечениях ($\alpha=\pm 45^\circ$) стержня.
- 3) Касательные напряжения на площадках, с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями ($\alpha=0^\circ, \pm 90^\circ$), равны нулю.
- 4) Касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по модулю и противоположны по знаку.

3.1.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ (УСИЛИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ)

Прочность – свойство материалов сопротивляться разрушению под воздействием внешних нагрузок.

Пластичность – свойство материалов менять свою форму под воздействием внешних нагрузок.

Механические свойства материалов (прочность, пластичность) могут быть оценены моделированием линейного напряженного состояния образца материала при так называемом испытании образца данного материала на разрыв.

По механическим свойствам материалы могут быть классифицированы на **пластичные** и **хрупкие**.

Здесь определяющим комплексным критерием при классификации материала является значение величины остаточных деформаций на момент разрушения его образца. Хрупкие материалы разрушаются при малых остаточных деформациях, а пластичные – при больших.

Для определения базовых механических свойств металлов и их сплавов применяется разрывная машина (рис. 3.9).

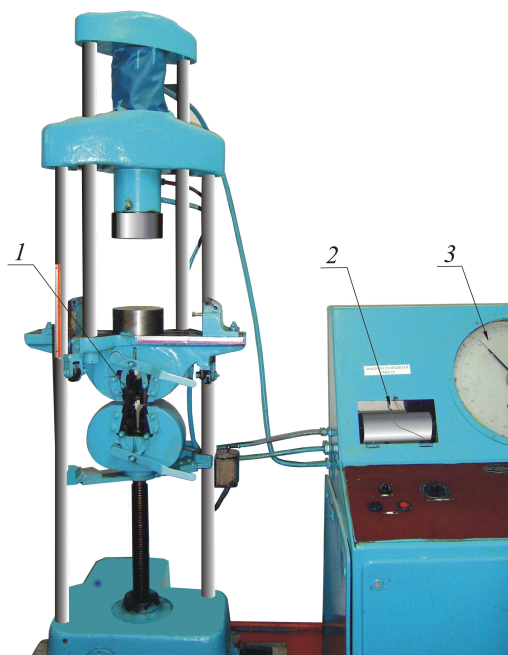


Рис. 3.9. Разрывная машина: 1 – самозажимные кулачки с устанавливаемым образцом; 2 – самозаписывающее устройство; 3 – измерительный барабан

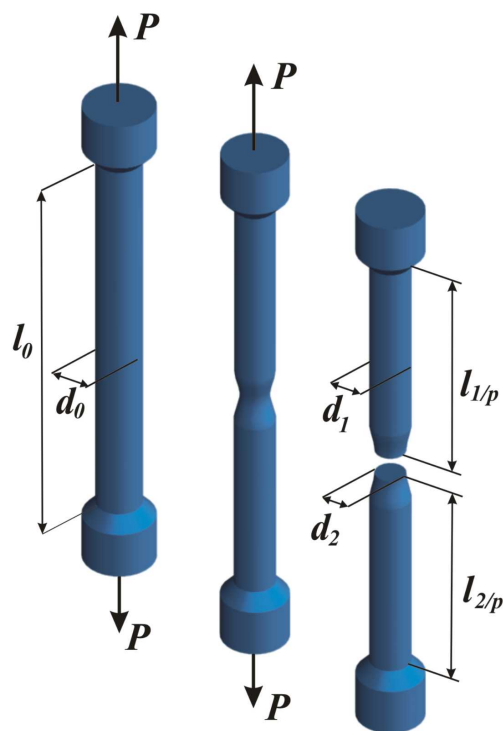


Рис. 3.10. Важнейшие параметры исследуемых образцов

Результаты испытаний на разрыв отслеживаются и фиксируются при помощи измерительного барабана и самозаписывающего устройства. Графическое отображение испытаний образца из пластичного материала на разрыв называется *диаграммой растяжения*.

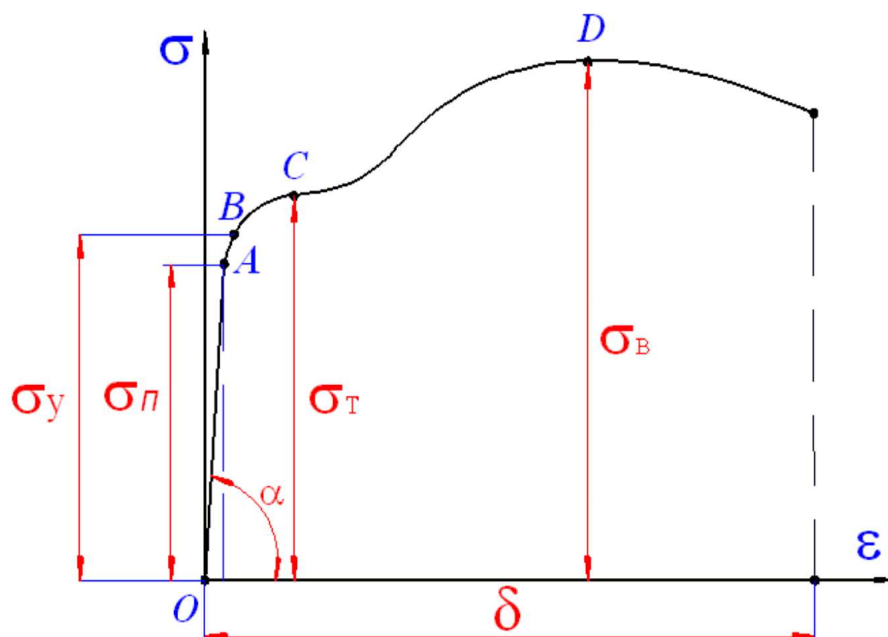


Рис. 3.11. Диаграмма напряжений растяжения малоуглеродистой стали

После обработки исходных данных, полученных при помощи самописца, на основании построенной диаграммы усилий растяжения, зная силовые и геометрические характеристики образца, рассчитывают и строят *диаграмму напряжений растяжений* (рис. 3.11).

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется величина наибольшего напряжения, при котором соблюдается закон Гука. Кривая AB отображает процесс появления остаточных деформаций в пределах от 0 (точка A) до 0,001...0,03% (точка B).

Пределом упругости σ_y называется такое напряжение, превышение которого вызывает появление малых остаточных деформаций свыше 0,03%.

Кривая правее точки C - представляет собой так называемую «площадку текучести».

Пределом текучести σ_T называется такое напряжение, при котором происходит «течение» материала – процесс существенного роста величины деформации при примерно постоянной нагрузке. Визуальный признак достижения на испытуемом образце σ_T - появление наклонных под углом 45° к оси образца линий (так называемых линий Чернова – Людерса).

Пределом прочности или *временным сопротивлением* σ_B называется напряжение, вызываемое наибольшей нагрузкой, достижение которого обуславливает начало процесса разрушения (разрыва) материала образца.

Характеризует величину силы, необходимую, для того чтобы довести материал до разрушения при растяжении. Из диаграммы напряжений можно определить и следующее соотношение. На участке OA , где выполняется закон

Гука: $tg \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$. Таким образом, модуль продольной упругости E - графически интерпретируется в виде тангенса угла наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы напряжений растяжения.

Остаточным относительным удлинением образца после разрыва называют отношение $\delta = (\Delta l / l_0) \cdot 100 \%$, где $\Delta l = (l_{1p} + l_{2p}) - l_0$ - абсолютное удлинение образца, l_0 - первоначальная длина образца.

Относительным остаточным сужением - после разрыва называется величина: $\psi = (A_0 - A_2) / A_0 \cdot 100 \%$, где $A_0 = (\pi \cdot d_0^2) / 4$ - первоначальная площадь сечения; $A_2 = (\pi \cdot d_2^2) / 4$ - площадь в месте разрыва.

Способность материала сопротивляться ударным нагрузкам можно оценить величиной произведения $\sigma_B \delta$.

Твердость - это свойство материалов сопротивляться внедрению в них более твердых тел. Между пределом прочности и твердостью существует соотношение: $\sigma_B \approx 0,36 H_B$. Формы диаграмм испытаний для различных материалов могут значительно отличаться между собой. На рисунке 3.12 приведены диаграммы напряжений, характеризующие механические свойства.

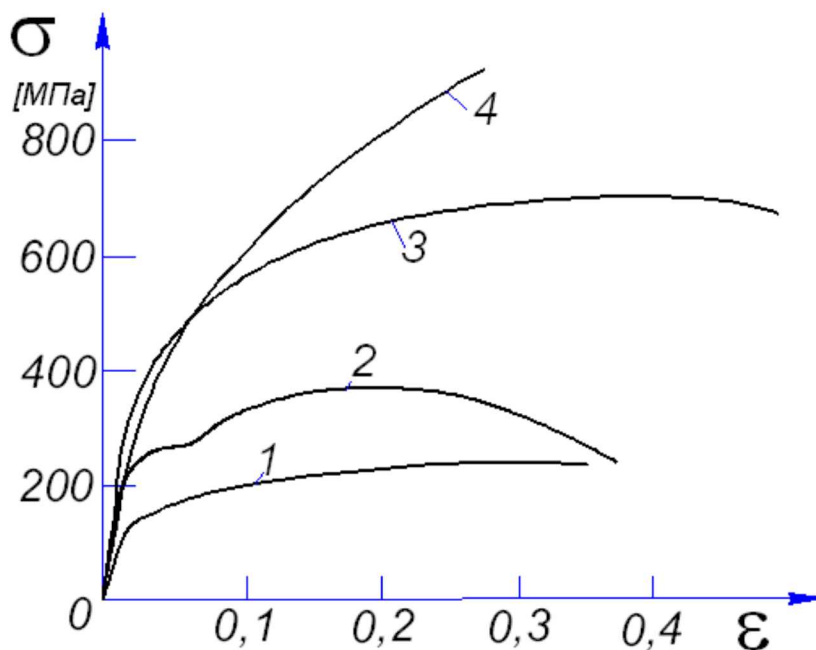


Рис. 3.12. Диаграммы напряжений для различных конструкционных сплавов:
 1- бронзы ($\sigma_B = 247 \text{ МПа}$; $\delta = 36 \%$); 2- углеродистой стали ($\sigma_B = 358 \text{ МПа}$; $\delta = 38 \%$);
 3- никелевой стали ($\sigma_B = 715 \text{ МПа}$; $\delta = 54 \%$);
 4- марганцевистой стали ($\sigma_B = 916 \text{ МПа}$; $\delta = 30 \%$)

Хрупкие материалы типа чугуна имеют другие диаграммы растяжения-сжатия. Деформации чугуна весьма малы. Одной из характерных особенностей является отсутствие прямолинейного участка как такового, при этом форма диаграмм сжатия и растяжения весьма схожа между собой.

Если рассматривать свойства чугуна, можно отметить хорошую сопротивляемость чугуна сжатию и значительно худшую - растяжению.

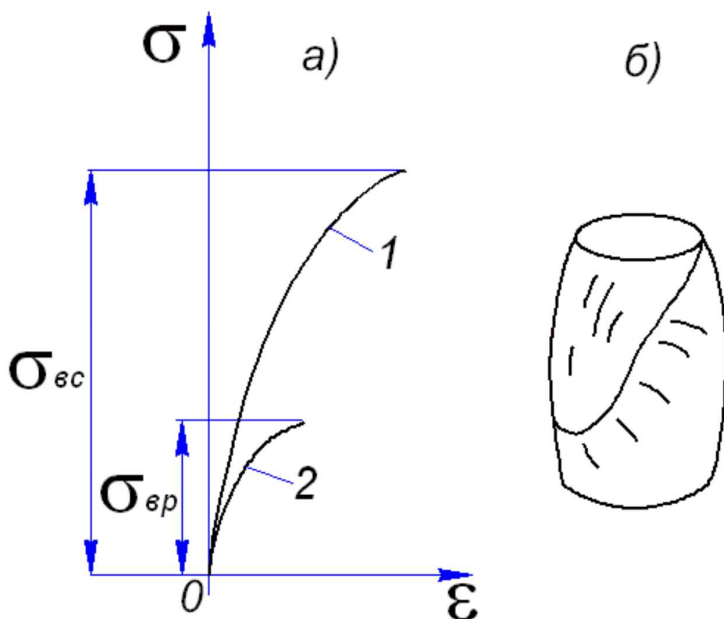


Рис. 3.13. Механические свойства чугуна и образец, разрушенный при испытании на сжатие

На рис. 3.13, а показаны диаграмма сжатия (линия 1) и диаграмма растяжения (линия 2) чугуна.

Таким образом, предел прочности чугуна на растяжение $\sigma_{\epsilon p} \approx (0,2 \dots 0,33) \sigma_{\epsilon с}$, где $\sigma_{\epsilon с}$ - предел прочности чугуна при сжатии.

При сжатии чугун разрушается в результате образования наклонных под углом 45° к оси образца трещин, т.е. параллельно площадкам, в которых действуют максимальные касательные напряжения, см. рис.3.13, б.

3.1.4. ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ»

Пример 3.2

Испытание двухметрового образца выявило, что значение предела пропорциональности для данного материала составляет 40 МПа . Известно, что при напряжении, равном половине предела пропорциональности, относительная продольная деформация равна $0,2 \text{ мм}$. Определить абсолютную продольную деформацию образца при напряжении, равном пределу пропорциональности. Определить модуль продольной упругости для данного материала.

Решение: Известно, что между относительными деформациями и напряжениями, не превышающими предел пропорциональности, выполняется закон Гука. Соответственно, должны выполняться соотношения:

$$\sigma_{\text{пц}} = E \cdot \epsilon_{\text{пц}} \text{ и } 0,5 \sigma_{\text{пц}} = E \cdot \epsilon_{0,5 \text{ пц}} \Rightarrow \epsilon_{\text{пц}} = 2 \cdot \epsilon_{0,5 \text{ пц}} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$\text{Т.к. } \sigma_{\text{пц}} = E \cdot \epsilon_{\text{пц}} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{40 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па.}$$

$$\text{Т.к. } \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \text{ то } \Delta l_{\text{пц}} = \epsilon_{\text{пц}} \cdot l_0 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 0,8 \text{ мм.}$$

Пример 3.3

Предел прочности для малоуглеродистой стали составляет $\sigma_B = 120 \text{ МПа}$, а предел текучести равен $\sigma_T = 80 \text{ МПа}$. Сохранит ли стержень сечением $A = 4 \text{ см}^2$ свою прочность с учётом коэффициента запаса прочности, равного 1,5; если его растягивают с усилием $P = 2,2 \text{ т}$? Ответ обосновать расчётом.

Решение: Малоуглеродистая сталь является пластичным материалом, для которого предельным напряжением является предел текучести. С учетом запаса прочности допускаемое напряжение для данного стержня составит:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{80 \cdot 10^6}{1,5} = 53,33 \text{ МПа}.$$

Произведем расчёт на прочность по допускаемому напряжению:
Условие прочности будет следующим:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (*)$$

Подставляя исходные и расчётные данные задачи в последнее неравенство, получим:

$$\sigma = \frac{2,2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^{-4}} = 55 \text{ МПа} \geq [53,33 \text{ МПа}].$$

Так как условие прочности (*) не выполняется, стержень будет разрушен.

3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

3.2.1. АКТУАЛЬНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В общем случае, подбор сечений элементов по условиям прочности, жесткости и устойчивости для различных конструкций относится к компетенции «Соппротивление материалов». Очевидно, что поперечное сечение i - го элемента представляет собой след от секущей плоскости, проведенной перпендикулярно оси симметрии или прямой, параллельной направлению наибольшего распространения рассматриваемого элемента. Также очевидно и то, что поперечное сечение представляет собой геометрическую площадку определенной формы, ограниченную контуром, с величиной площади, равной A_i . Интуитивно при подборе размеров поперечного сечения по условиям прочности можно было бы руководствоваться принципом: большая нагрузка – большая величина площади A_i поперечного сечения. Однако данный принцип не является верным для общего случая нагружения. Доказательство: берем брус прямоугольного сечения (обычную деревянную линейку), имитируем консоль с жесткой заделкой, для этого фиксируем данный брус, кладя его на большую полку. Прикладываем к нему небольшую поперечную силу в крайнем свободном сечении и констатируем характер деформации бруса (ощутимая величина прогиба крайнего сечения), а также возможность его излома при приложении несколько большей силы. Далее, фиксируем брус на малую полку, прикладываем к нему даже несколько большую силу и констатируем крайне малую величину прогиба, не соизмеримую с ранее полученной величиной. При этом отмечаем, что в обоих случаях вылет консоли и площадь поперечного сечения бруса остаются одними и теми же. Можно предположить, что на величину деформации и прочности элемента влияет то, как его поперечное сечение располагается относительно плоскости действия внешней нагрузки, которая в этом сечении элемента (при изгибе) будет вырождаться в прямую. Иными словами, на величину деформации и прочности влияет то, как

рассматриваемое сечение расположено по отношению к этой прямой (оси). Отсюда вывод: в общем случае, руководствоваться при расчётах на прочность и жесткость элемента только площадью его поперечного сечения недостаточно. Необходимо рассматривать другие геометрические характеристики поперечных сечений, связанные с их расположением по отношению к осям (точкам), лежащим в их плоскостях.

3.2.2. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ. ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В сопротивлении материалов используются следующие характеристики геометрических сечений, рис. 3.14.

Площадь является простейшей характеристикой поперечного сечения. Если представить себе сечение, состоящее из бесчисленного множества элементарных площадок dA , то площадь всего сечения:

$$A = \int_A dA. \quad (3.19)$$

Статическим моментом сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния до этой оси.

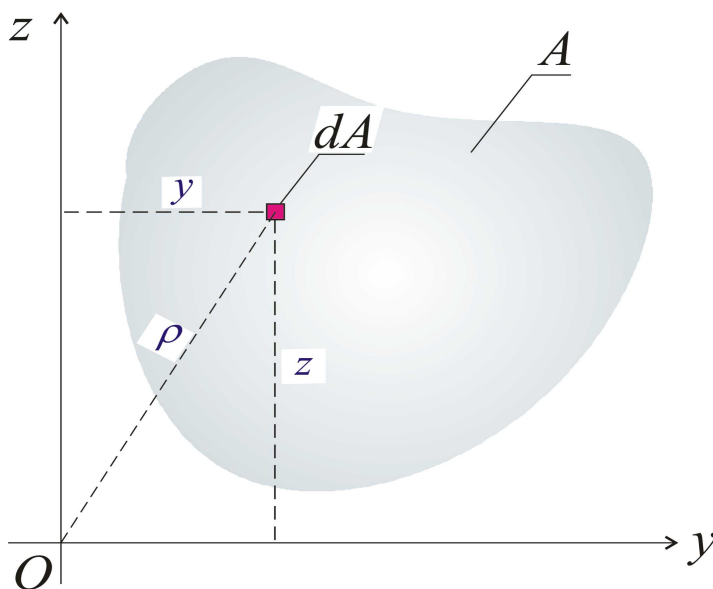


Рис. 3.14. Параметры геометрических характеристик

То есть для комплекта осей y, z :

$$S_z = \int_A y dA; \quad (3.20)$$

$$S_y = \int_A z dA. \quad (3.20')$$

В теоретической механике имеются формулы для определения координат

центров тяжести плоской фигуры, для комплекта осей y, z :

$$y_c = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i}; \quad (3.21)$$

$$z_c = \frac{\sum (A_i z_i)}{\sum A_i}. \quad (3.21')$$

Если размеры элементарной площадки $A_i \rightarrow 0$, числители в формулах (3.21) будут представлять собой соответствующие статические моменты, т.е.:

$$S_z = \int_A y dA = y_c A \quad (3.22)$$

и
$$S_y = \int_A z dA = z_c A. \quad (3.22')$$

Таким образом, статический момент сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, будет равен произведению площади данного сечения на расстояние ее центра тяжести до этой оси. Свойства статического момента:

- 1) Статический момент может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.
- 2) Статический момент сечения относительно оси, лежащей в плоскости сечения и проведенной через ее центр тяжести, равен нулю.
- 3) Для определения статического момента сечения можно применять метод разбиения, то есть определять статический момент всего сечения как сумму статических моментов отдельных ее частей, относительно той же оси $S_J = \sum S_{J_i}$.
- 4) Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно разных осей.

Статический момент в системе СИ измеряется в $[м^3]$, часто на практике статический момент измеряют в $[см^3]$.

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до этой оси. То есть для комплекта осей y, z :

$$J_y = \int_F z^2 dA \quad \text{и} \quad J_z = \int_A y^2 dA. \quad (3.23)$$

Полярным моментом инерции сечения, относительно какой-либо точки (полюса), лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их

расстояний до точки. То есть для комплекта осей y, z :

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (3.24)$$

Свойства осевых и полярного момента инерции:

- 1) Осевые и полярные моменты инерции величины всегда положительные и не равны нулю.
- 2) Осевой момент инерции сложного сечения можно вычислять как сумму моментов инерции простых фигур, взятых относительно той же оси.
- 3) Полярный момент инерции сложного сечения относительно какой-либо точки, лежащей в плоскости сечения, равен сумме полярных моментов инерции составляющих его частей относительно той же точки.
- 4) Нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно разных осей и точек.
- 5) Сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости сечения, равна полярному моменту инерции этого сечения, относительно точки пересечения указанных осей, т.е. $J_y + J_z = J_p$.

Центробежным моментом инерции сечения относительно каких-либо двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости сечения, называется взятая по всей площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей. То есть для комплекта осей y, z :

$$J_{yz} = \int_A yz dA. \quad (3.25)$$

Свойства центробежного момента:

- 1) Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.
- 2) Центробежный момент инерции сечения относительно осей, одна из которых или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.
- 3) Центробежный момент инерции сложного сечения относительно каких-либо двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей, относительно этих же осей.

Все рассмотренные моменты инерции измеряются в СИ $[м^4]$, для удобства, как правило, в сопротивлении материалов моменты инерции измеряют в $[см^4]$.

3.2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

Моменты инерции относительно осей y, z , проходящих через центр тяжести прямоугольного сечения (рис. 3.15), определяются по формулам:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \text{ и } J_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (3.26)$$

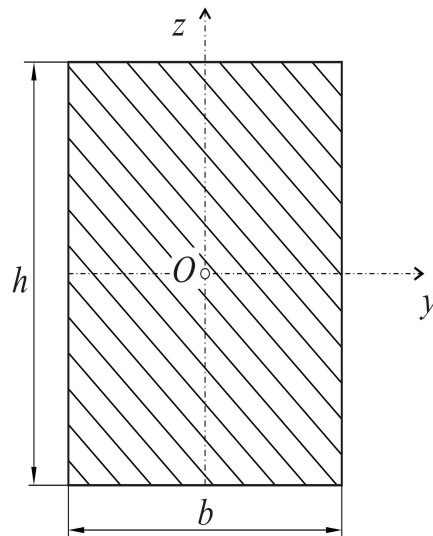


Рис. 3.15. Определение геометрических характеристик прямоугольного сечения, относительно главных центральных осей

Рассмотрим сечение в виде круга (рис. 3.16).

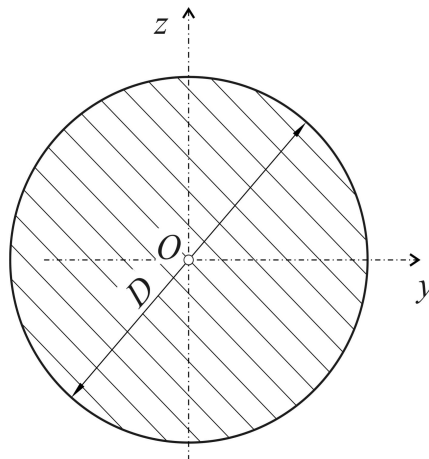


Рис. 3.16. Определение геометрических характеристик круглого сечения

Моменты инерции относительно осей y, z , проходящих через центр тяжести для сплошного круглого сечения, см. рис. 3.16, определяются как

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (3.27)$$

Полярный момент:

$$J_p = J_y + J_z = 2 \cdot \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (3.28)$$

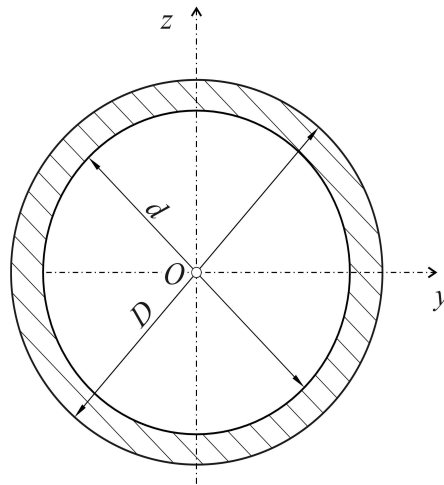


Рис. 3.17. Определение геометрических характеристик кольцевого сечения

Моменты инерции относительно осей y, z , проходящих через центр тяжести кольцевого сечения с наружным диаметром D и внутренним d , рис. 3.17, определяются:

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right). \quad (3.29)$$

Полярный момент:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right). \quad (3.30)$$

3.2.4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

При рассмотрении практических задач не всегда удобно пользоваться интегральной формой решения. Гораздо рациональнее применение комбинированного подхода.

Данный подход заключается в разбиении сложного сечения на более простые сечения, моменты инерции которых относительно своих центров тяжести известны, а также использовании универсальных формул изменения величин моментов инерции сечения при параллельном переносе осей сечения.

Если существует необходимость перехода к новой системе осей, параллельных соответственно старым координатным осям, применяют следующие зависимости.

Допустим, в старой системе координаты элементарной площадки имеют значения y и z . В новой системе координат они будут равны:

$$z_1 = z - a$$

$$\text{и } y_1 = y - b.$$

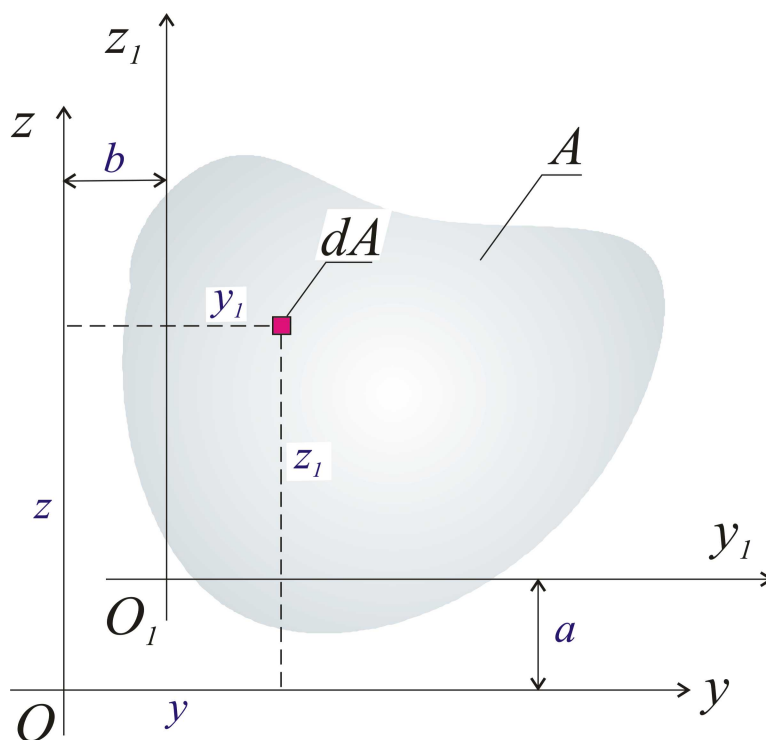


Рис. 3.18. Моменты инерции осей при параллельном переносе осей

То есть:

$$J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z - a)^2 dA = \int_A z^2 dA - 2a \int_A z dA + a^2 A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{y_1} = J_y - 2aS_y + a^2 A.$$

Если ось y проведена через центр тяжести сечения, то статический момент $S_y = 0$ и выражение принимает следующий вид: $J_{y_1} = J_y + a^2 A$. Аналогично для случая, когда ось y проходит через центр тяжести сечения: $J_{z_1} = J_z + b^2 A$.

Из данной формулы следует: из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, будет иметь минимальное значение.

Для центробежного момента: $J_{y_1 z_1} = J_{yz} - aS_z - bS_y + abA$.

В случае, если старая система координат yz находится в центре тяжести сечения, то $S_y = 0$ и $S_z = 0$ и $J_{y_1 z_1} = J_{yz} + abA$.

Если сечение симметрично и одна или обе оси совпадают с осью симметрии, то $J_{yz} = 0$ и $J_{y_1 z_1} = abA$.

3.3. СДВИГ И СРЕЗ

3.3.1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА (СРЕЗА)

Сдвигом (срезом) называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса из шести внутренних усилий определяющей является поперечная сила.

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестности данной точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

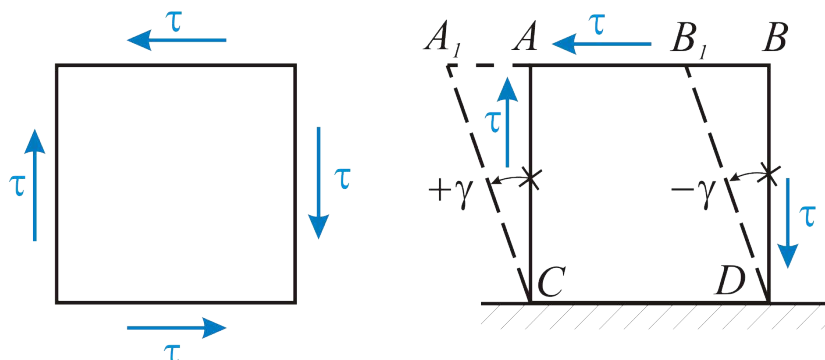


Рис. 3.19. Деформация чистого сдвига

При таком плоском напряженном состоянии нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках будут равны друг другу по величине и противоположны по направлению.

Каждая из граней параллелепипеда перемещается относительно противоположной грани на величину A_1A , называемую *абсолютным сдвигом*.

Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется *относительным сдвигом*.

При малых деформациях относительный сдвиг равен величине *угла сдвига* γ . Угол сдвига γ образуется вследствие изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда. Абсолютный сдвиг измеряется в единицах длины, относительный - в радианах. Как показывают результаты опытов, величина угла сдвига γ прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость называется *законом Гука при сдвиге*:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ или } \tau = \gamma G. \quad (3.31)$$

Здесь, как мы видим, прослеживается аналогия с законом Гука при растяжении-сжатии: $\sigma = \varepsilon E$. Коэффициент пропорциональности G в формулах называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода*. Модуль упругости второго рода G , также как и модуль упругости первого рода E , является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость. При объемной деформации потенциальная энергия изменения объема равна нулю, а полная удельная энергия равна удельной потенциальной энергии изменения формы. Исходя из этого условия устанавливается следующая зависимость между физическими постоянными:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (3.32)$$

Величина абсолютного сдвига зависит не только от величины касательных напряжений, но и от размеров выделенного элемента. Если A - площадь граней, по которым действует касательные напряжения, a - расстояния между параллельными гранями, то абсолютный сдвиг Δs :

$$\Delta s = a\gamma = \frac{a\tau}{G} = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}. \quad (3.33)$$

Здесь, как мы видим, прослеживается аналогия с абсолютной продольной деформацией Δl , определяемой по формуле $\Delta l = \frac{Pl}{E \cdot A}$. Таким образом, абсолютный сдвиг прямо пропорционален сдвигающей силе, расстоянию между сдвигаемыми гранями и обратно пропорционален площади сечения этих граней и модулю упругости второго рода (модулю сдвига). Для стали $G \approx 0,4E \approx 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Рассмотрим брус, у которого в вертикальной плоскости симметрии приложены на небольшом расстоянии две равные и противоположно направленные поперечные внешние силы P . Мысленно разделим брус на две части по плоскостям поперечных сечений, содержащих эти силы (рис. 3.20).

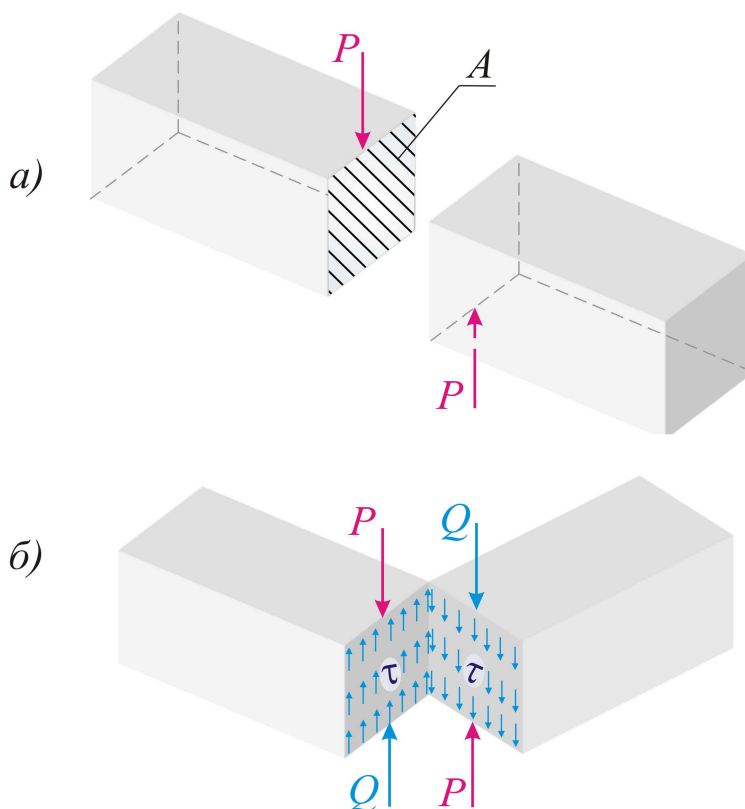


Рис. 3.20. Касательные напряжения при сдвиге

Применим метод сечений. Составим условие статического равновесия для фрагментов бруса A, B :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q = P.$$

Очевидно, при сдвиге поперечная сила будет представлять собой равнодействующую внутренних касательных сил в поперечном сечении при сдвиге. Очевидно также и то, что при сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения τ . Предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению, их величина вычисляется как $\tau = Q/A$. Данное значение в определенной мере будет приближительной величиной, так как линии действия сил не расположены строго на одной прямой.

3.3.2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

На практике часто приходится сталкиваться с конструкциями, для которых разрушение происходит именно путем среза (сдвига), вследствие воздействия внешних сил. Деформация сдвига, приведшая к разрушению элемента, называется *срезом* (для пластичных материалов) и *скалыванием* для хрупких материалов. Простейшими примерами таких конструкций являются болтовые и заклепочные соединения листового профиля. Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают (пробивают) отверстия. В них вставляется стержень (как правило, нагретый) заклепки с одной головкой. Другой конец стержня заклёпывается ударами специального молотка или при помощи клепальной машины с гидравлическим приводом. Мелкие заклепки $d \leq 8 \text{ мм}$ ставятся в холодном состоянии (авиационные конструкции). Условие прочности детали конструкции, работающей на сдвиг, заключается в том, что наибольшее рабочее напряжение не должно превышать допустимое или касательное напряжение при сдвиге не должно превышать допустимое, в общем виде:

$$\tau = Q/A \leq [\tau]. \quad (3.34)$$

При n - числе, d - диаметре заклепки, в заклепочном соединении данное условие принимает вид:

$$\tau = \frac{P}{A} \leq \frac{P}{n \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\tau_{CP}]; \quad (3.35)$$

для заклепочного соединения, имеющего две плоскости среза:

$$\tau = \frac{P}{A} \leq \frac{P}{n \frac{\pi \cdot d^2}{2}} \leq [\tau_{CP}]. \quad (3.36)$$

Как правило, для подобного рода расчетов исходят из заданного диаметра заклепочных стержней d , заданной толщины соединяемых профилей t (обычно $d \approx 2t$), определяя необходимое количество заклепок.

$$n \geq \text{int} \left(\frac{4P}{\pi \cdot d^2 \cdot [\tau_{CP}]} \right) + 1. \quad (3.37)$$

для заклепочного соединения, имеющего две плоскости среза:

$$n \geq \text{int} \left(\frac{2P}{\pi \cdot d^2 \cdot [\tau_{CP}]} \right) + 1. \quad (3.38)$$

Расчеты на прочность данных соединений на срез дополняют так называемыми расчетами на смятие. Если детали конструкции, передающие сжимающую нагрузку, имеют малую контактную поверхность, то происходит *смятие* поверхностей детали.

Расчет на смятие производят, полагая, что нормальные напряжения равномерно распределены по площади контакта. Расчетное уравнение в общем виде:

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{A_{CM}} \leq [\sigma_{CM}]. \quad (3.39)$$

Для заклепочных соединений с учетом, что $A_{CM} = n \cdot t \cdot d$ - условная площадь смятия, данная формула примет вид:

$$\sigma = \frac{P}{n \cdot t \cdot d} \leq [\sigma_{CM}], \quad (3.40)$$

отсюда необходимое количество заклепок:

$$n \geq \text{int} \left(\frac{P}{t \cdot d \cdot [\sigma_{CM}]} \right) + 1. \quad (3.41)$$

Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от его предела текучести σ_T .

В машиностроении для штифтов, болтов, шпонок, установленных с нулевым зазором, принимают:

$[\tau_{CP}] = 0,4 \sigma_T$ - для статической нагрузки, $[\tau_{CP}] = (0,2 \dots 0,3) \sigma_T$ - для переменной;

В зависимости от марки стали условие прочности в стыке: $[\sigma_{CM}] = 0,8 \sigma_T$ - для углеродистой стали и $[\sigma_{CM}] = (0,6 \dots 0,8) \sigma_T$ - для легированной.

Пример 3.4. При приложении центрального растягивающего усилия P образец материала с начальной длиной 100 мм увеличил свою длину до $100,1 \text{ мм}$, при этом его поперечный размер уменьшился на $0,025\%$.

Считая деформацию упругой и принимая $E = 200 \text{ ГПа}$, определить модуль сдвига данного материала.

Решение:

Абсолютная продольная деформация равна:

$$\Delta l = l_1 - l_0 \Rightarrow (100,1 - 100) \cdot 10^{-3} = 10^{-4} \text{ м.}$$

Относительная продольная деформация определится как

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{10^{-4}}{10^{-1}} = 10^{-3}.$$

Относительную поперечную деформацию выразим в натуральном виде:

$$\varepsilon' = -0,025\% \sim -25 \cdot 10^{-5}.$$

Определим коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{-25 \cdot 10^{-5}}{10^{-3}} \right| \Rightarrow \mu = 0,25.$$

Зная модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона, можно определить модуль сдвига по формуле:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{200 \cdot 10^9}{2(1+0,25)} \Rightarrow G = 80 \text{ ГПа.}$$

Ответ: $G = 80 \text{ ГПа}$.

Пример 3.5. Подобрать диаметр болта (рис. 3.21), установленного с нулевым зазором в соединении двух листов одинаковой толщины $t = 5 \text{ мм}$, сдвигаемых центральной силой $P = 1 \text{ м}$, прикладываемой статически. Принять для материала болта углеродистую сталь с $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$.

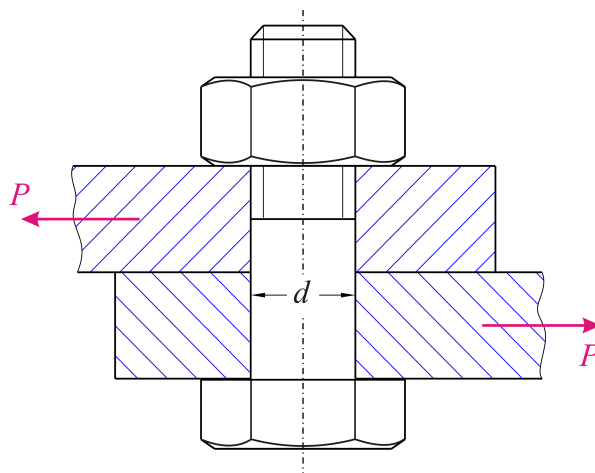


Рис. 3.21. К условию примера 3.5

Решение:

По условию задачи принимаем: $[\tau_{CP}] = 0,4 \sigma_T \Rightarrow [\tau_{CP}] = 0,4 \cdot 220 = 88 \text{ МПа}$;

$[\sigma_{CM}] = 0,8 \sigma_T \Rightarrow [\sigma_{CM}] = 0,8 \cdot 220 = 176 \text{ МПа}$.

По условиям среза:

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1 \cdot 10^4}{\pi \cdot 88 \cdot 10^6}} = 10^{-1} \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi \cdot 88}} \Rightarrow d \geq 0,012 \text{ м.}$$

По условиям смятия:

$$d \geq \frac{P}{\delta [\sigma_{CM}]} = \frac{1 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 176 \cdot 10^6} \Rightarrow d \geq 0,01136 \text{ м.}$$

По результатам двух расчётов принимаем больший диаметр $d = 12 \text{ мм}$.

Ответ: $d = 12 \text{ мм}$.

Пример 3.6. Для заклёпочного соединения (рис. 3.22), с толщинами соединяемых листов $t_1 = 10 \text{ мм} = 2t_2 = 2t_3$, симметрично нагруженного центральной переменной силой с максимальным значением $P = 4 \text{ т}$, рассчитать необходимое количество заклёпок диаметра $d = 6 \text{ мм}$.

Материал заклёпок – углеродистая сталь с $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$. Считать нагрузку равномерно распределённой среди заклёпок.

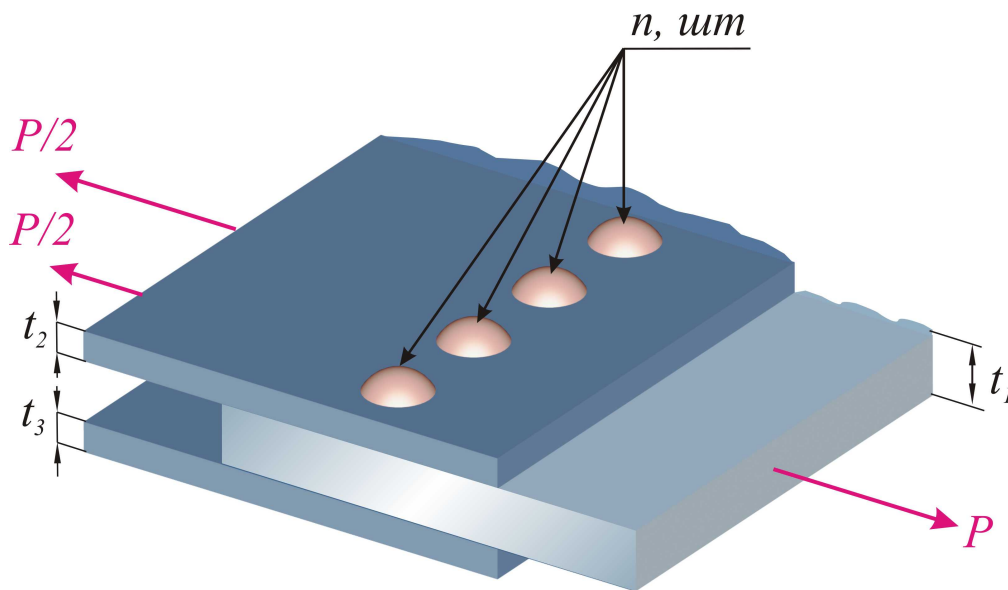


Рис. 3.22. К условию примера 3.6

Решение:

По условию задачи принимаем

$$[\tau_{CP}] = 0,2 \sigma_T \Rightarrow [\tau_{CP}] = 0,2 \cdot 210 = 42 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{CM}] = 0,8 \sigma_T \Rightarrow [\sigma_{CM}] = 0,8 \cdot 210 = 168 \text{ МПа}.$$

Учтём, что в данном случае у каждой заклёпки две плоскости среза.

Потребное количество заклёпок n по условиям среза:

$$n \geq \text{int} \left(\frac{2P}{\pi \cdot d^2 \cdot [\tau_{CP}]} \right) + 1 = \text{int} \left(\frac{4 \cdot 10^4}{\frac{\pi \cdot (6 \cdot 10^{-3})^2}{2} \cdot 42 \cdot 10^6} \right) + 1 \Rightarrow$$

$$n \geq \text{int}(16,84) + 1 = 16 + 1 = 17 \text{ шт.}$$

Потребное количество заклёпок n по условиям смятия:

$$n \geq \text{int} \left(\frac{P}{t \cdot d [\sigma_{CM}]} \right) + 1.$$

Здесь в качестве t берем минимальную толщину среди соединяемых листов. В данном случае $t=5\text{ мм}$.

Следовательно:

$$n \geq \text{int} \left(\frac{P}{t \cdot d [\sigma_{CM}]} \right) + 1 = \text{int} \left(\frac{4 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 168 \cdot 10^6} \right) + 1 \Rightarrow$$

$$n \geq \text{int}(7,94) + 1 = 7 + 1 = 8 \text{ шт.}$$

По результатам двух расчётов принимаем большее потребное количество заклёпок $n=17\text{ шт}$.

Ответ: $n=17\text{ шт}$.

3.3.3. РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

На срез принято приближенно рассчитывать и некоторые виды сварных соединений, таких как сварка встык и с помощью угловых или валиковых швов.

Сварка встык применяется, когда соединяемые детали находятся в одной плоскости.

При толщине листов $\delta \leq 8\text{ мм}$, рис. 3.23, а, кромки листов не обрабатываются.

При $8 \leq \delta \leq 20\text{ мм}$, рис. 3.23, б, кромки листов скашиваются и сварка производится с одной стороны, при этом получается V-образный шов.

При $\delta \geq 20\text{ мм}$, рис. 3.23, в, кромки скашиваются с двух сторон и получается X-образный шов. Расчет таких швов производится на разрыв. Расчетную толщину шва принимают равной толщине листа, без учета наплавов.

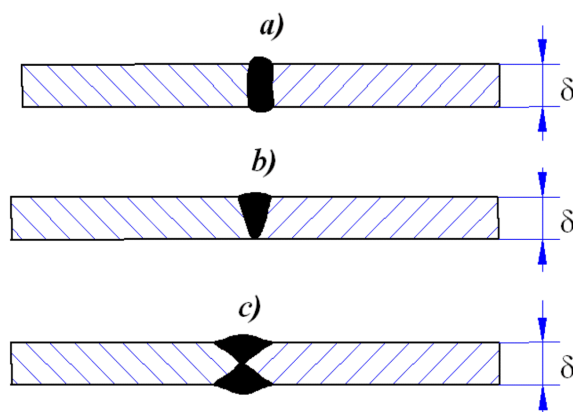


Рис. 3.23. Виды швов сварки встык в зависимости от толщины соединяемых листов

Соединения при помощи *угловых швов* применяют в случаях, когда соединяемые листы параллельны или перпендикулярны.

К таким соединениям относятся соединения *внахлестку, с накладками* и *тавровые* (рис. 3.24, 3.26, 3.27). Если направление шва перпендикулярно к действующему усилию (рис. 3.24), то шов называется *лобовым*.

Швы, параллельные усилию (рис. 3.26 и рис. 3.29), называются *фланговыми* или *боковыми*. Применяются также и *косые* швы (рис. 3.25), направленные под углом α к действующей силе. Как правило, при расчетах

сварных швов наплывы не учитывают, а считают, что в поперечном разрезе шов имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника.

Очевидно, разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению, высота которого $m = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta$. Расчет швов, как и заклепок, ведется в предположении равномерного распределения напряжений по сечению шва.

Расчет лобового шва. С учетом того, что сопротивление стали срезу ниже, чем сопротивление растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пренебрегают и расчет швов производят условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по расчетной площади сечения, на рис. 3.28 это площадь $ABCD$.

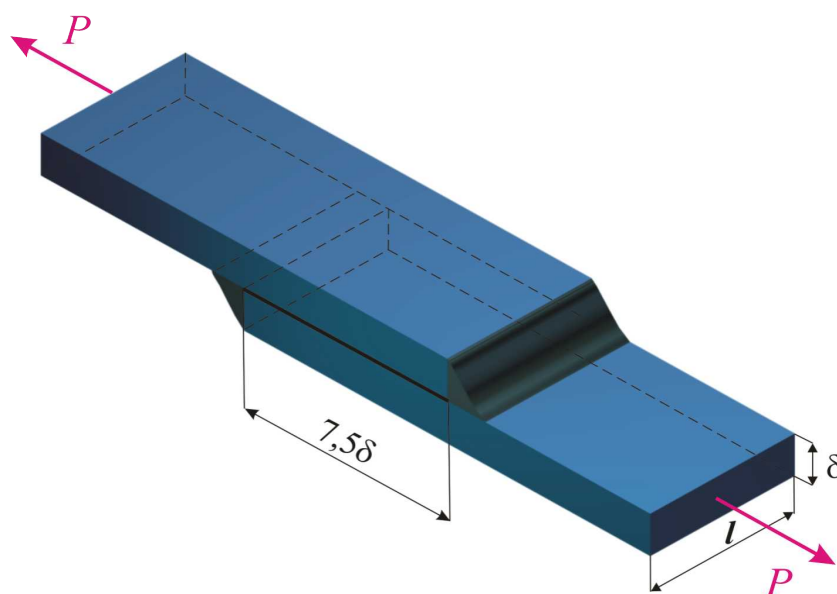


Рис. 3.24. Соединение внахлестку с помощью лобовых швов

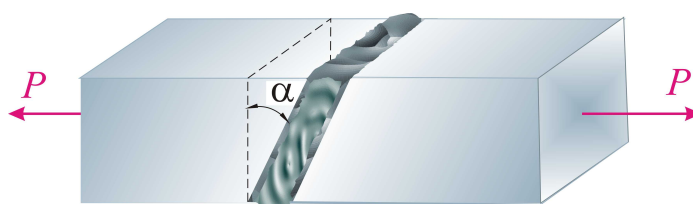


Рис. 3.25. Пример косого шва

При расчете лобовых швов соединения внахлестку учитывают оба шва - верхний и нижний. Их общая площадь: $A = 2ml = 2 \cdot 0,7\delta l = 1,4\delta l$. В таком случае условие прочности:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1,4 \cdot \delta l} \leq [\tau_s]. \quad (3.42)$$

Расчетная длина торцевого шва l_p определяется по формуле:

$$l_p = \frac{P}{1,4 \cdot \delta \cdot [\tau_s]}. \quad (3.43)$$

Кроме того, расчетная длина шва l_p в связи с непроваром в начале и в конце шва обычно принимается на 10 мм меньше действительной l :

$$l_p = l - 10 \text{ мм}. \quad (3.44)$$

Расчет фланговых швов

Фланговые швы имеют на практике наибольшее распространение. Они менее жестки, чем лобовые, вследствие большей протяженности металла в направлении действия силы. Фланговые швы всегда ставятся парами. Они работают на срез в биссекторных сечениях. Площадь среза двух швов оценивается как

$$A = 2 \cdot 0,7 \delta (l - 10 \text{ мм}) = 1,4 \delta (l - 10 \text{ мм}). \quad (3.45)$$

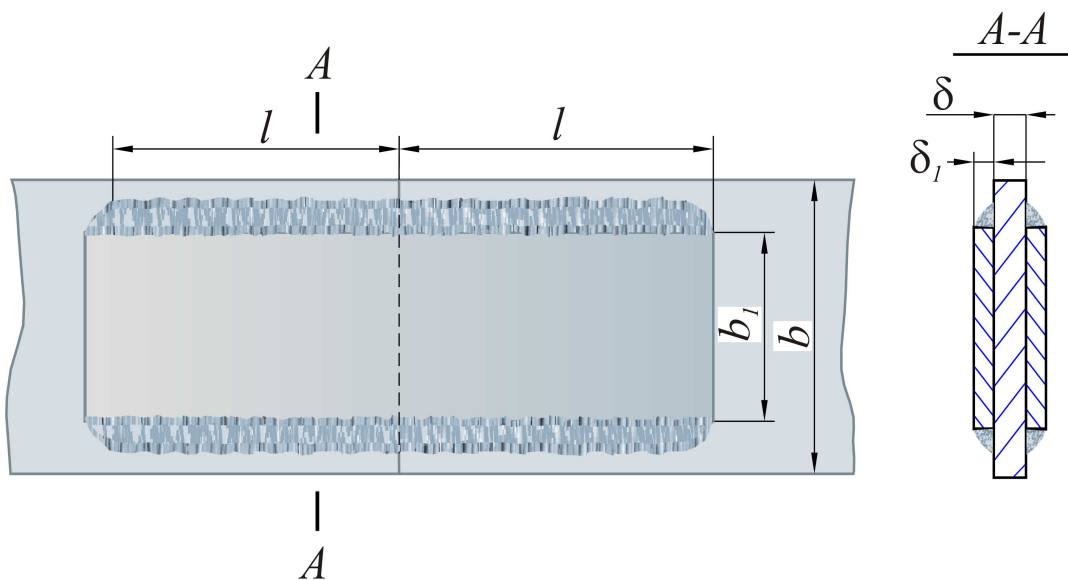


Рис. 3.26. Соединение с накладками, приваренными фланговыми швами

Условие прочности на срез:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1,4 \delta (l - 10 \text{ мм})} \leq [\tau_s]. \quad (3.46)$$

Длина шва определяется по формуле:

$$l = \frac{P}{1,4 \delta [\tau_s]} + 10 \text{ мм}. \quad (3.47)$$

При проектных расчетах, в зависимости от соединяемых материалов и способа сварки используют ориентировочные значения допускаемых напряжений, например табл.3.1.

Таблица 3.1

Ориентировочные допускаемые напряжения для сварных соединений (материал электродов и соединяемых элементов - малоуглеродистая сталь ст.3; сталь 20)

Вид деформации	Обозначение	Ручная сварка (электроды с тонкой обмазкой)	Автоматическая сварка и ручная сварка (электроды с толстой обмазкой)
Растяжение	$[\sigma_y^+]$	98 МПа	128 МПа
Сжатие	$[\sigma_y^-]$	108 МПа	142 МПа
Срез	$[\tau_y]$	79 МПа	108 МПа

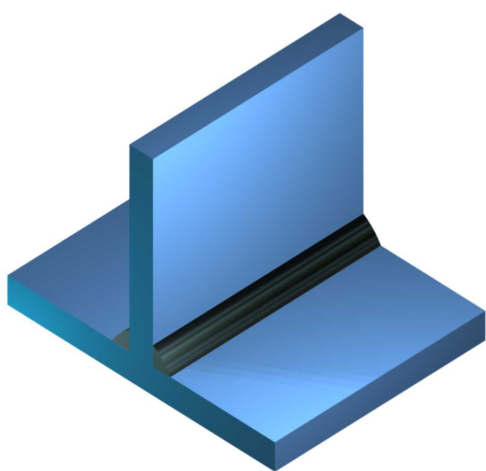


Рис. 3.27. Тавровое соединение

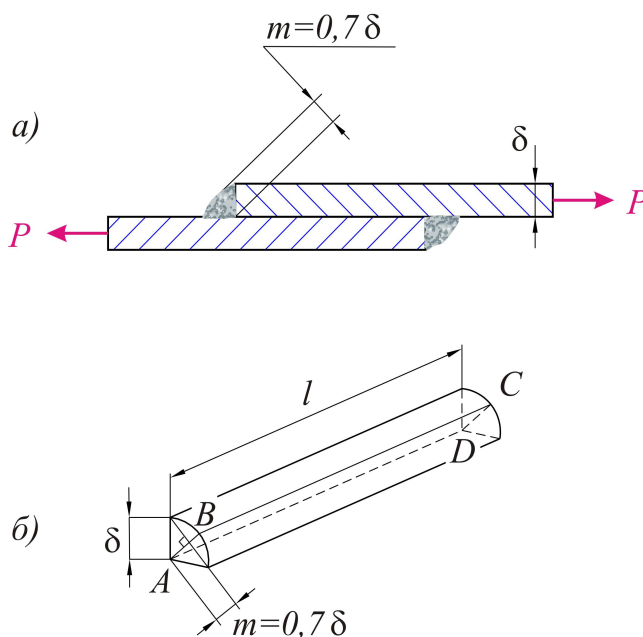


Рис. 3.28. К расчету угловых швов: а) поперечное сечение соединения; б) биссекторное сечение $ABCD$

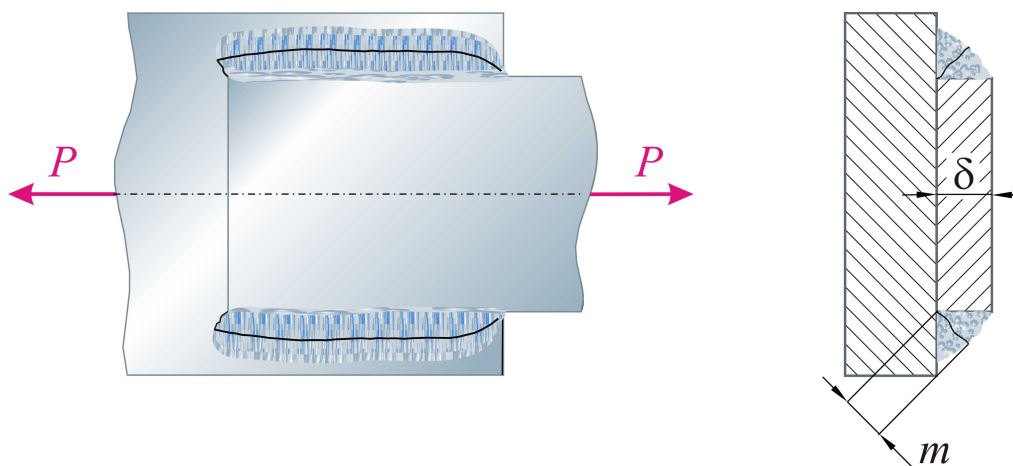


Рис. 3.29. Фланговые швы, работа на срез в биссекторных сечениях

Пример 3.7. Рассчитать необходимую длину соединения встык двух листов

(рис. 3.30) толщиной $t=4\text{ мм}$, необходимую для обеспечения прочности данного соединения, если величина предполагаемой центральной растягивающей статически прикладываемой нагрузки $P=3\text{ т}$.

Материал свариваемых листов и электрода - малоуглеродистая сталь. Способ сварки - автоматическая в среде углекислого газа.

Решение: С учетом особенностей сварки встык, расчёт на прочность ведут по допускаемым нормальным напряжениям растяжения для соединений, полученных электродуговым способом - $[\sigma_9^+]$.

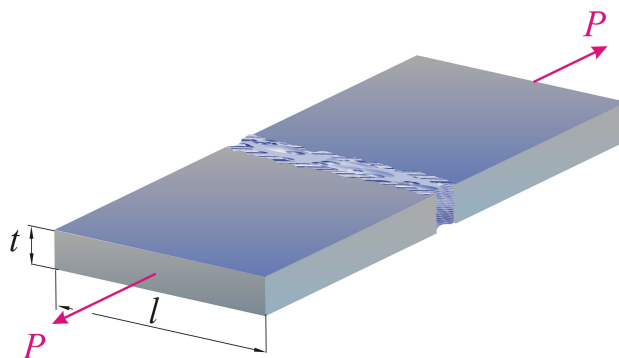


Рис. 3.30. К условиям примера 3.7

Принимаем согласно способу сварки - $[\sigma_9^+]=127\text{ МПа}$.

Условие прочности в таком случае будет следующим:

$$\sigma^+ = \frac{P}{(l-10\text{ мм}) \cdot t} \leq [\sigma_9^+] \Rightarrow$$

Необходимая длина шва с учетом непровара материала листа в начале и конце шва должна составлять следующую величину:

$$l = \frac{P}{t \cdot [\sigma_9^+]} + 10 \cdot 10^{-3}, \text{ [м]}.$$

Считаем: $l = \frac{3 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 127 \cdot 10^6} + 10 \cdot 10^{-3} = 0,069\text{ м}$, или 69 мм .

Ответ: $l=69\text{ мм}$.

Пример 3.8. Выполнить проверочный расчет на прочность соединения внахлест лобовым швом (рис. 3.31), если ширина листов составляет $l=60\text{ мм}$, толщина соединяемых листов $t_1=4\text{ мм}$ и $t_2=7\text{ мм}$.

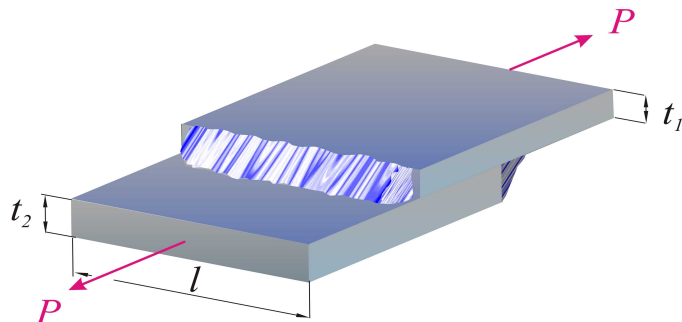


Рис. 3.31. К условию примера 3.8

Материал листов и электрода - малоуглеродистая сталь, способ

сваривания - ручной, электродами с тонкой обмазкой. Величина предполагаемой центральной растягивающей нагрузки $P=2,5\text{ т}$.

Решение.

С учетом особенностей сварки внахлест лобовым швом, расчёт на прочность ведут по допускаемым касательным напряжениям для соединений, полученных электродуговым способом - $[\tau_9]$.

Принимаем согласно способу сварки - $[\tau_9]=78,4\text{ МПа}$.

Условие прочности, в таком случае будет следующим:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1,4 \delta (l - 10\text{ мм})} \leq [\tau_9],$$

где δ - минимальная толщина среди соединяемых листов.

Проверим, будет ли выполняться данное условие в нашем случае:

$$\frac{2,5 \cdot 10^4}{1,4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} (0,06 - 10^{-2})} \leq 78 \cdot 10^6 \Rightarrow 89,3 \cdot 10^6 > 78 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

Условие не выполняется, и соединение будет разрушено.

В данном случае для обеспечения прочности достаточно изменить технологию сварки: заменить способ сваривания на автоматический, при котором $[\tau_9]=107,8\text{ МПа}$. Более качественный шов, при той же геометрии и тех же условиях работы конструкции, обеспечит прочность соединения, условие прочности в случае применения автоматической сварки будет безусловно выполнено: $89,3 \cdot 10^6 < 107,8 \cdot 10^6$.

3.3.4. ПАЯНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Паянием - называется процесс соединения деталей с друг с другом или устранения их дефектов, производимый посредством нанесения на нагретые детали расплавленного материала – припоя. При охлаждении расплавленный припой вместе с охлаждаемой поверхностью образуют паяльный шов, диффузионно и химически связанный с материалом этой поверхности.

При помощи паяния возможно получение соединения элементов из черных и цветных сплавов. В последнее время всё шире применяется паяние для ремонта и получения неразъёмных однородных соединений из некоторых видов пластмасс (телескопическое и встык соединения пластмассовых труб и т.д.). Рассмотрим ряд терминов, применяемых при паянии.

Припайвание (спайвание) – процесс соединения деталей при помощи паяния. *Запайвание* – устранение дефектов на деталях – раковин, пустот при помощи паяния. *Наращивание* – наращивание металла для увеличения размера детали. *Спайка* – место соединения двух спаянных деталей.

Припой – сплав, необходимый для наполнения швов и пустот при паянии. Паяние мягкими (слабыми) припоями производится в случаях, когда от спайки не требуется большая прочность. В качестве слабых припоев используют обычно сплавы олова со свинцом. Для обеспечения достаточной прочности (или особых физических свойств) паяного соединения используют твёрдые (крепкие) припои. В качестве твердых (крепких) припоев используются

латунные или серебряные сплавы.

Флюс – вещество, служащее для удаления окислов с поверхности деталей из металлов и сплавов, предназначенной для паяния. При пайке пластмасс флюс не используется.

При пайке металлов и сплавов в качестве флюса для слабых припоев применяется чаще всего хлористый цинк (с добавкой нашатыря, образующий так называемую паяльную кислоту), получаемый от растворения в соляной кислоте цинка. После спаивания рекомендуется очищать место пайки от остатков флюса, с целью избежания последующей коррозии.

Для элементов, которые нельзя очистить после пайки от следов хлористого цинка (паяльной кислоты), рекомендуется применять паяльный жир (канифольевую мазь), спиртовой раствор канифоли или чистую канифоль. Последняя представляет собой единственный флюс, не вызывающий последующего окисления.

При паянии твердыми припоями в качестве флюса используют чистую обезвоженную буру (при паянии серебряными припоями) или смесь железного порошка с бурой при паянии латунными припоями чугуна.

Расчёт на прочность паяльных соединений производится по аналогии с расчетом на прочность сварных соединений. Необходимые для расчёта механические свойства припоев содержатся в технических справочниках. Отметим так же, что несущая способность паяного соединения увеличивается за счет площади контактной поверхности пайки.

Основные виды паяных соединений представлены на рис. 3.32.

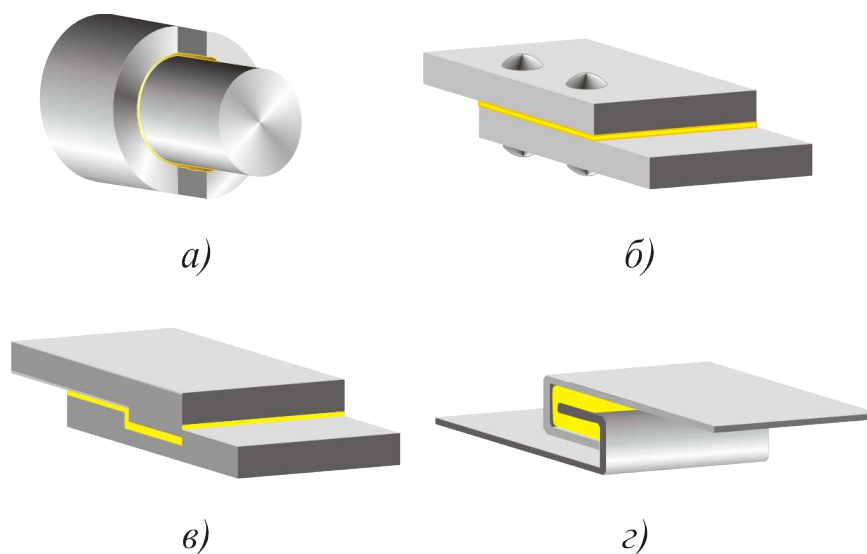


Рис. 3.32. Паяные соединения: а) телескопическое; б) внахлестку с заклёпкой (штифтом); в) внахлестку со шпонкой; г) фальцевым замком

3.3.5. КЛЕЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Клеевым называется неразъемное соединение, образованное с помощью вещества (клея), способного соединять (склеивать) поверхности материалов и удерживать их вместе. Особенностью клеевого соединения является его способность соединять практически любые разнородные материалы и

практически в любом их сочетании, включая: древесину, пластики, стекло, ткани, кожу, керамику, стекло, чугун, стали, цветные металлы и их сплавы и т.д. Эта способность в отдельных случаях определяет склеивание, как единственную возможность получения прочного соединения различных материалов в ответственных конструкциях. Кроме того, следует отметить, что клеевое соединение не ослабляет соединяемые элементы. Многие клеи инертны по отношению к агрессивным средам и способны в сочетании с конструктивными и технологическими мерами обеспечивать герметичность при монтаже конструкции. Кроме того стоимость склеивания, как правило, ниже сварочных, заклёпочных или болтовых соединений.

Наиболее широко распространены такие виды клеевых соединений, различаемых по роду клея, как соединение *внахлѣстку* и *телескопическое*.

Для телескопического соединения обычно применяют жидкие клеи холодного затвердевания, для соединения внахлест - высокопрочные (плѣночные) клеи.

По аналогии с пайкой, прочность склеивания прямо пропорциональна наименьшей площади контактирующей поверхности одного из соединяемых элементов, а также зависит от химической природы склеивающего вещества (клея) и толщины наносимого слоя. Как правило, клеевые соединения неплохо работают на сдвиг, несколько хуже – на разрыв. Кроме того, клеевые соединения хорошо справляются с статической нагрузкой и хуже - с динамической. В случае динамической нагрузки, для обеспечения запаса прочности целесообразно клеевое соединение сочетать с другими видами механических соединений или принимать дополнительные меры конструктивного характера. На рис. 3.33 изображены некоторые виды клеевых соединений.

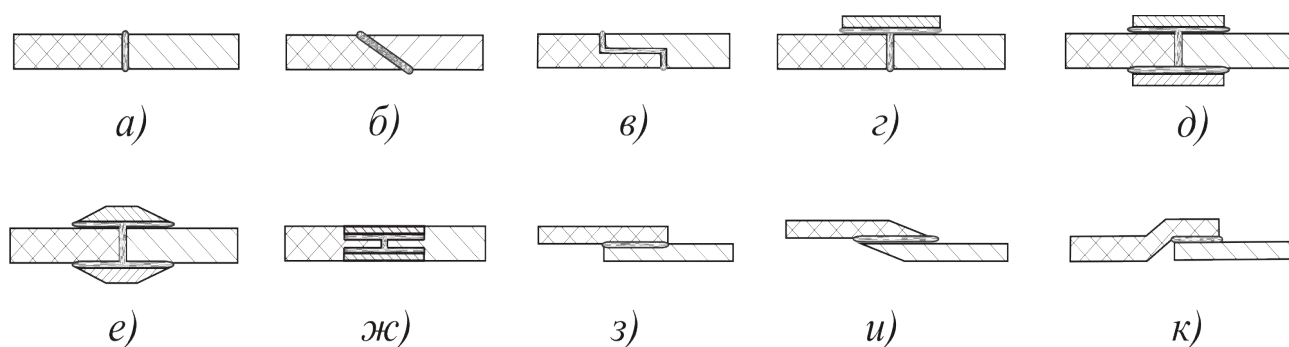


Рис. 3.33. Некоторые виды клеевых соединений: а) стыковое; б) усовое; в) полушиповое; г) стыковое с накладкой; д) стыковое с двумя накладками; е) стыковое со скошенными накладками; ж) стыковое с утопленной двойной накладкой; з) внахлѣст; и) внахлѣст со скосом; к) внахлѣст с подсечкой

Толщина наносимого клея зависит от его вязкости, условий монтажа и обычно составляет 0,04...0,3 мм. Условие прочности для клеевого соединения внахлест (см. рис. 3.33, з), работающего на сдвиг (скол):

$$\tau = \frac{P}{A_p} \leq [\tau_c], \quad (3.48)$$

где A_p - расчётная площадь, равная $b \cdot l$, здесь b и l - ширина и длина

нахлёста; $[\tau_c]$ - допускаемое касательное напряжение клея при сдвиге (сколе).

В промышленности наиболее широко распространены клеи на фенолонитрилкаучуковой основе, эпоксидные, на полиуретановой основе.

Для склеивания древесины продолжают применять клеи на казеиновой основе.

В последнее время всё активнее применяют высокопрочные быстросхватывающиеся циакриновые (циакриловые) клеи, например, этилцианакрилат. Более подробно с характеристиками клеев и механическими свойствами клеевых соединений можно ознакомиться в соответствующих технических справочниках.

3.4. КРУЧЕНИЕ

3.4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРУЧЕНИИ

Если в поперечном сечении бруса из шести внутренних усилий имеется внутренний момент ($M_{кр}$ или M_x) относительно продольной оси x , (или линии, параллельной направлению наибольшего распространения материала) бруса, то в таких случаях наблюдается так называемая деформация *кручения*.

Деформация кручения вызывается парами сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня.

К конструкциям, работающим на кручение, можно отнести следующие: торсионные и трансмиссионные валы, пружины, пространственные тонкостенные и прочие профили и т.д.

3.4.2. ВРАЩАЮЩИЙ МОМЕНТ. МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ КРУЧЕНИЮ. КРУТЯЩИЕ МОМЕНТЫ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

В качестве примера рассмотрим случай работы на кручение валов круглого поперечного сечения. Возьмем трансмиссионный вал CD , имеющий два шкива I и II . Вал установлен на подшипники (рис. 3.34).

Шкив I передает валу вращение при помощи клиноременной передачи от источника энергии (электродвигателя).

Шкив II передает это вращение исполняющему механизму.

К шкиву I приложены силы натяжения ведущей T_1 и набегающей t_1 ветвей ремня. Данные силы лежат в плоскости, перпендикулярной оси вала. Аналогично к шкиву II приложены силы натяжения ремня T_2 и t_2 .

Анализируя действие этих сил, можно сказать, что данные силы создают давление на подшипники, а также образуют пары сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вала.

Величина момента, передающегося через шкив I на вал:
 $M_1 = T_1 R_1 - t_1 R_1 = (T_1 - t_1) R_1$ - называется *вращающим моментом*.

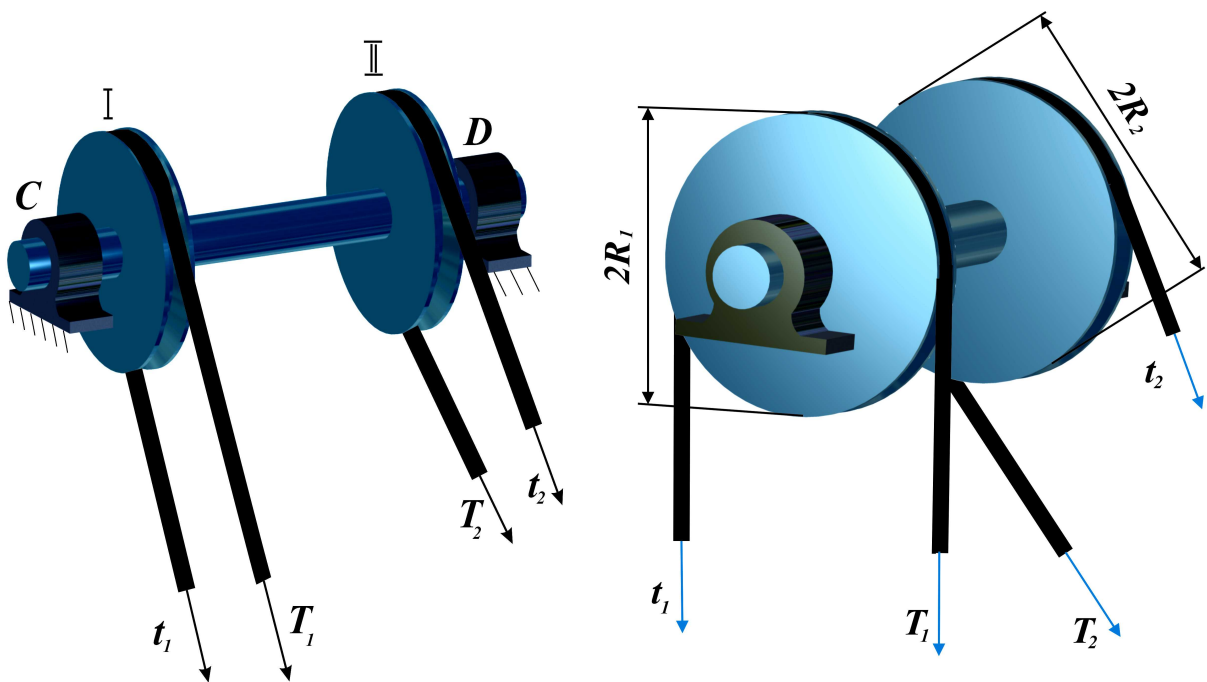


Рис. 3.34. Трансмиссионный вал, работающий на кручение

По аналогии, от шкива *II* на вал передается момент M_2 , направленный в противоположную сторону и равный: $M_2 = (T_2 - t_2)R_2$ - *моментом сопротивления вращению*.

Установившееся (равномерное) движение привода и исполнительных механизмов обуславливает равномерное вращение трансмиссионного вала.

На основании этого можно утверждать, что все силы, действующие на вал, находятся в равновесии.

То есть вращающий момент $(T_1 - t_1)R_1$ уравнивается моментами сопротивления вращению $(T_2 - t_2)R_2 + \dots + (T_i - t_i)R_i$,

$$\text{т.е. } (T_1 - t_1)R_1 = (T_2 - t_2)R_2 + \dots + (T_i - t_i)R_i = M_k.$$

На основании ранее приведенного понятия о деформации кручения (вызывается парами сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня), можно считать, что участок вала между центрами шкивов будет скручиваться.

Внутренний момент, равный по величине моменту пар сил, скручивающих вал, называется *крутящим моментом*. Рассмотрим расчёт данных внутренних усилий на конкретном примере.

Пример 3.9. Построить эпюру крутящего момента для равномерно вращающегося вала. Момент вращения на ведущем шкиве составляет $M_3 = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Моменты сопротивления вращению на ведомых шкивах: $M_1 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_2 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_4 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$, рис. 3.35.

Решение: Для вращающих моментов и моментов сопротивления вращению справедливо равенство $M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = 0$. Очевидно, крутящий

момент на участках вала будет принимать различные значения.

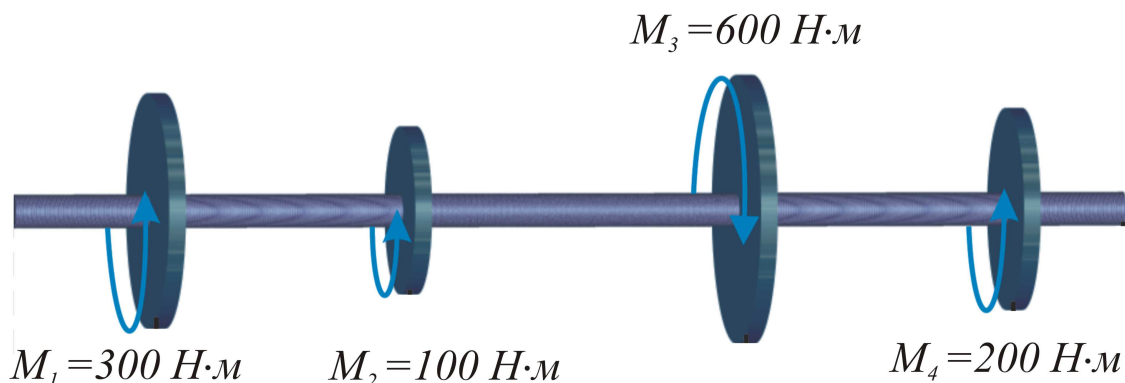


Рис. 3.35. К условию примера

Для их определения применяют универсальный метод сечений, т.е.: *крутящий момент для любого сечения равен сумме скручивающих внешних моментов, действующих на вал слева или справа от данного сечения.*

$$M_{кр} = \sum_{\text{слева}} M_i = \sum_{\text{справа}} M_j. \quad (3.49)$$

Знак крутящего момента в сечении определяется следующим правилом:

Крутящий момент, уравнивающий внешний скручивающий момент в рассматриваемом сечении, будет положительным, если со стороны отсечённой части он виден направленным по часовой стрелке.

Считая опорами крайние сечения, разобьем вал на пять участков.

Применяя метод сечения справа и правило знака крутящего момента, определим внутренние усилия для каждого участка, рис. 3.36.

Первый участок:

$$M_{кр1} = 0.$$

Второй участок:

$$M_{кр2} = M_4 = 200 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

Третий участок:

$$M_{кр3} = M_4 - M_3 = 200 - 600 = -400 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

Четвёртый участок:

$$M_{кр4} = M_4 - M_3 + M_2 = 200 - 600 + 100 = -300 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

Пятый участок:

$$M_{кр5} = M_4 - M_3 + M_2 + M_1 = 200 - 600 + 100 + 300 = 0.$$

Величину крутящего момента в сечении отображают графически путем построения эпюры крутящих моментов, см. рис. 3.36.

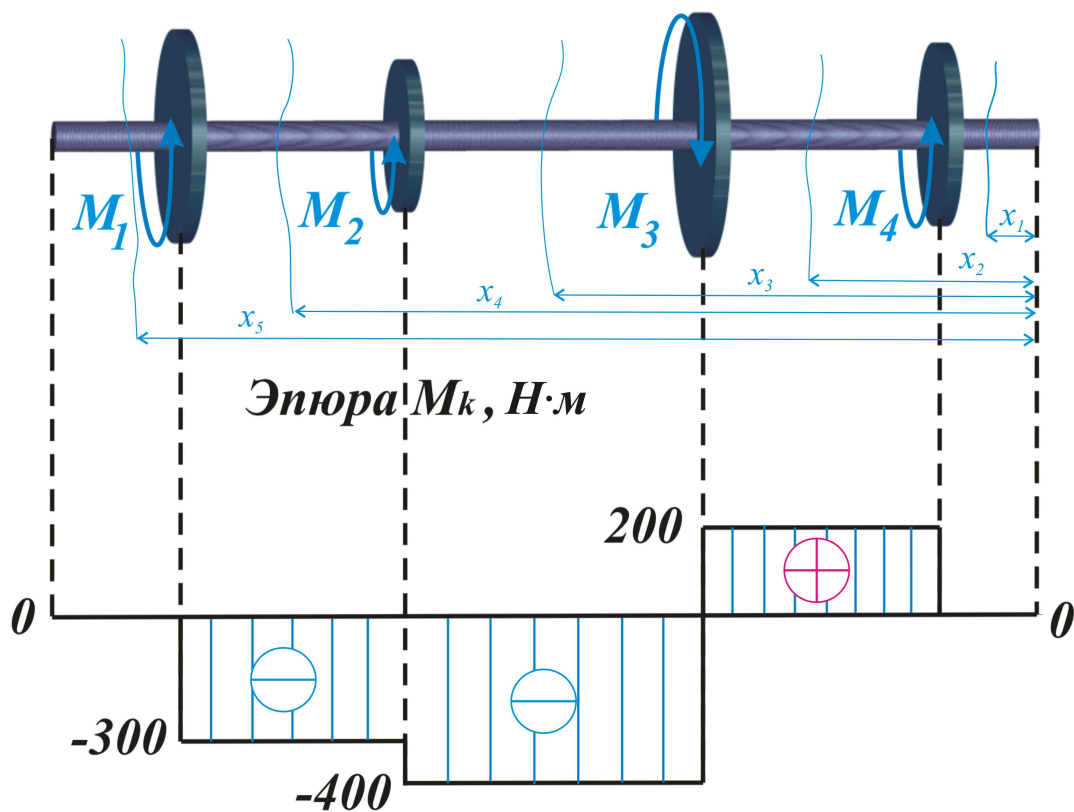


Рис. 3.36. К примеру 3.10: Разбиение на участки методом сечения справа.
Ниже расположена эпюра внутреннего крутящего момента

3.4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ НА ВАЛ

При повороте вала на угол α (рад) каждая из пары сил M , представляющая окружные усилия на шкиве радиуса R (рис. 3.37), пройдет путь $R\alpha$ и, соответственно, произведёт работу: $A = 2PR\alpha = M\alpha$. Если вал совершает m оборотов в единицу времени, то работа момента будет равна: $A = M \cdot 2\pi \cdot m$.

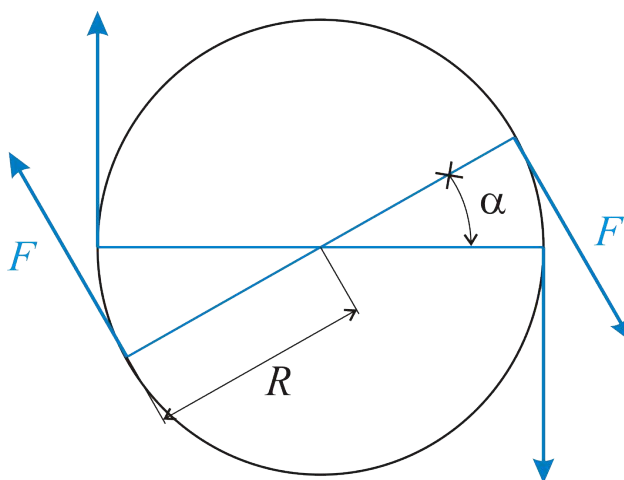


Рис. 3.37. Работа пар сил при кручении

Исходя из определения мощности W (работа в единицу времени), вращающий момент можно выразить через известную подводимую мощность W , Вт, и число оборотов вала m , [сек⁻¹], $m = \frac{n}{60}$; где n , [мин⁻¹], тогда

$$M = \frac{W}{2\pi \cdot m}.$$

Если мощность привода задана в лошадиных силах $W = N$, то $W = 75 N \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}} \right]$ и $M = \frac{75 \cdot N \cdot 60}{2\pi \cdot n} \Rightarrow$

$$M = 7,01876 \cdot \frac{N}{n}, [\text{кН} \cdot \text{м}]. \quad (3.50)$$

Если мощность привода задана в киловаттах $W = K$, кВт, учитывая, что $1 \text{ кВт} \approx 102 \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}} \right]$, то $M = \frac{102 \cdot 60}{2\pi} \cdot \frac{K}{n} \Rightarrow$

$$M = 9,5413 \cdot \frac{K}{n} [\text{кН} \cdot \text{м}]. \quad (3.51)$$

3.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим брус круглого сечения с заземленным концом (рис. 3.38). Загрузим данный брус моментом, прикладывая его в крайнем (свободном) сечении.

В результате чего крайние сечения бруса повернутся относительно друг друга вокруг продольной оси на некоторый угол φ , который представляет собой *полный угол закручивания* на участке длиной l .

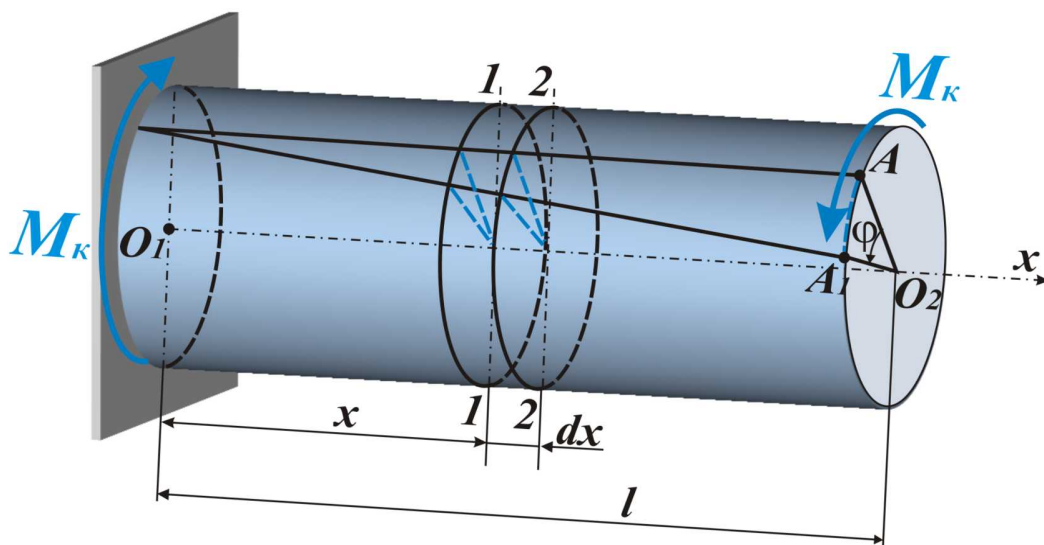


Рис. 3.38. Деформационная картина при кручении

Отношение полного угла закручивания $d\varphi$ на элементарном участке бруса к длине dx называется *относительным углом закручивания* φ_0 (°):

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (3.52)$$

Если размеры поперечного сечения бруса и крутящий момент в поперечном сечении в пределах i -го участка постоянны, то значение относительного угла закручивания φ_0 также постоянно и равно: $\varphi_{0_i} = \varphi_i / l_i$.

Анализ опытных данных показывает, что при кручении вала круглого сечения происходит следующее:

1. Все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ (рис. 3.39).
2. Расстояния между соседними поперечными сечениями $1-2 \Delta x$ после деформации не изменяются.
3. Форма поперечных сечений остается неизменной, и радиусы, проведенные в поперечных сечениях, остаются прямолинейными и после деформации.
4. Все поперечные сечения после деформации остаются плоскими.
5. Наибольшие касательные напряжения наблюдаются на поверхности стержня и равны нулю на его оси.

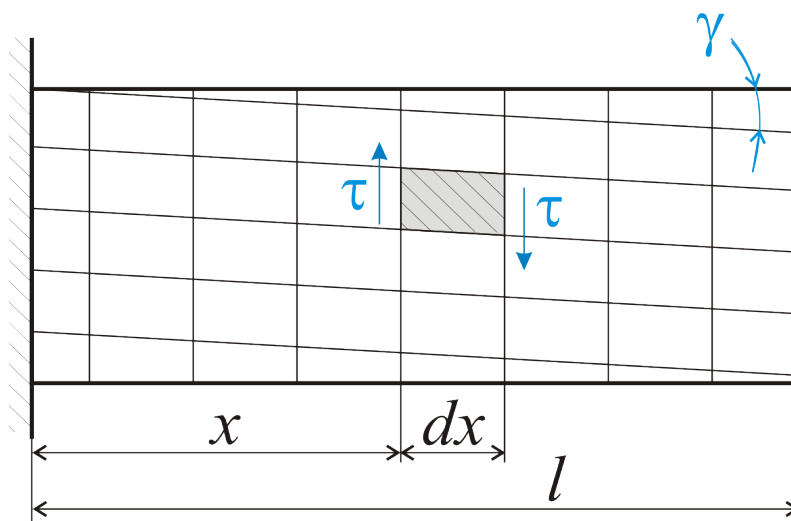


Рис. 3.39. К определению напряжений при кручении

Очевидно, максимальные касательные напряжения (рис. 3.40) будут на поверхности вала:

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_k r}{J_p}, \quad (3.53)$$

или

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (3.54)$$

Отношение

$$\frac{J_p}{\rho_{max}} = W_p, \quad [M^3], \quad (3.55)$$

называется *моментом сопротивления кручению*.

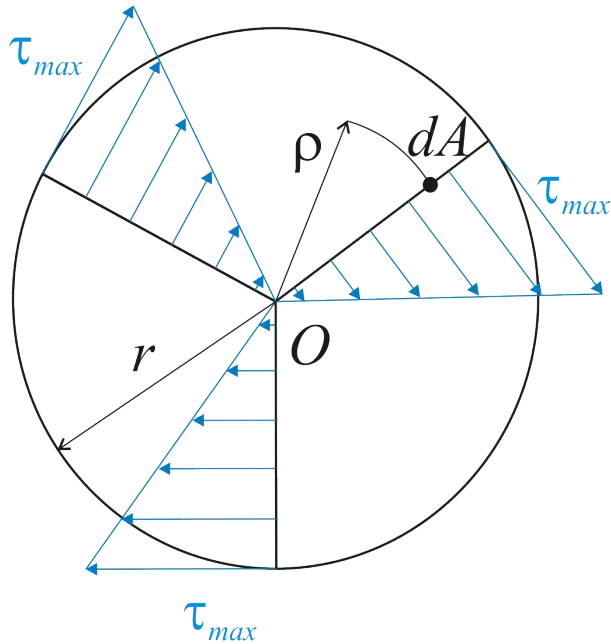


Рис. 3.40. Линейная зависимость между касательными напряжениями и расстоянием волокна до нейтральной оси при кручении круглого сечения

3.5. ИЗГИБ

3.5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗГИБЕ

Деформация *изгиба* наблюдается в том случае, если в рассматриваемом сечении есть внутренние усилия в виде поперечных сил Q_y, Q_z , перпендикулярных к оси балки, или моментов M_y, M_z , лежащих в плоскостях, проходящих через ось стержня. Стержень, работающий на изгиб, как правило, называется балкой. Изгиб представляет собой деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев. При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент является единственным силовым фактором, то изгиб называется *чистым*. Как правило, в поперечных сечениях бруса, наряду с изгибающими моментами, возникают также и поперечные силы. В этом случае изгиб называют поперечным. Изгиб называют *прямым*, если изгибающий момент в данном поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

3.5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА И ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ

Поперечная сила Q_x вычисляется как алгебраическая сумма проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, в том числе опорных реакций, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$Q_x = \sum_{\text{слева}} P_i = \sum_{\text{справа}} P_j. \quad (3.56)$$

Изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов относительно сечения от всех внешних сил, в том числе и опорных реакций, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$M_x = \sum_{\text{слева}} M_i = \sum_{\text{справа}} M_j. \quad (3.57)$$

С целью упорядочения оценки суммарной величины поперечной силы и изгибающих моментов, примем следующее правило знаков $Q(x)$ и $M(x)$ (рис. 3.41).

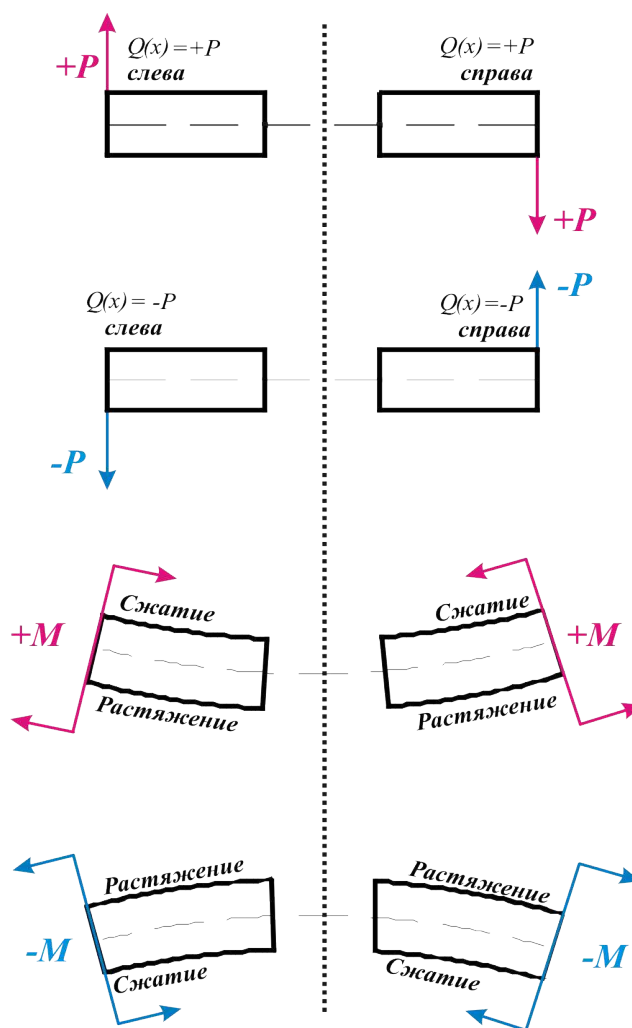


Рис. 3.41. Правило знаков внутренних сил при изгибе

Изгибающий момент для левой отсеченной части, образуемый действием каждой силы в отдельности, считаем положительным, если момент относительно центра тяжести сечения направлен по часовой стрелке, отрицательным – против часовой стрелки. Для правой части балки знаки изгибающих моментов противоположны.

Принятое *правило знаков* для $M(x)$ соответствует характеру деформации балки: *положительный изгибающий момент изгибает её выпуклостью вниз, а отрицательный – выпуклостью вверх.*

При положительном изгибающем моменте верхние волокна балки испытывают сжатие, а нижние – растяжение. Поперечную силу Q_x условимся считать положительной, если внешние силы, лежащие слева от проведенного сечения, направлены вверх, справа – вниз. *Правила знаков* Q_x и M_x графически отображены на рисунке 3.41. Указанный метод определения поперечных сил и изгибающих моментов позволяет построить эпюры Q и M .

3.5.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СПЛОШНОЙ НАГРУЗКИ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Рассматривая условие равновесия элемента длиной dx , взятого в произвольном месте шарнирно закреплённого бруса, находящегося под действием внешней распределённой нагрузки интенсивностью q , получим:

$$q \cdot dx - dQ = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = q. \quad (3.58)$$

Рассматривая равновесие этого же элемента, с учётом уравнения (3.58), отбрасывая бесконечно малые величины второго порядка, запишем:

$$Q \cdot dx - dM = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = Q. \quad (3.59)$$

Взяв производную от обеих частей последнего равенства, выведем:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = q. \quad (3.60)$$

На основании полученных зависимостей делаем следующие выводы.

1. Производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

2. Производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.

3. Вторая производная от изгибающего момента по абсциссе равна интенсивности сплошной нагрузки.

Надо полагать, что величина поперечной силы в сечении представляет собой тангенс угла наклона, образуемого с осью абсцисс, касательной к эпюре M в точке, соответствующей этому сечению. Если ось x направлена справа

налево, то $\frac{dM}{dx} = -Q$, так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс. Отдельные теоретические положения, используемые для контроля правильности построения эпюр Q и M , приведены ниже.

1. Если в сечении интенсивность нагрузки $q = \frac{dQ}{dx} = 0$, касательная к эпюре Q параллельна оси абсцисс и поперечная сила $Q = Q_{max}$ или $Q = Q_{min}$.

2. Величина изгибающего момента в сечении достигает максимума (минимума) в том сечении, где поперечная сила $Q = \frac{dM}{dx} = 0$.

3. Если значение поперечной силы на рассматриваемом участке положительно, то на данном участке функция момента будет возрастать, и наоборот.

4. Эпюра поперечной силы в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенной поперечной силы, имеет скачок (разрыв), равный величине данной силы. Направление скачка определяется знаком данной поперечной силы.

5. Эпюра изгибающих моментов в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенного момента, имеет скачок (разрыв), равный величине данного момента. Направление скачка определяется знаком данного изгибающего момента.

6. Кривая второго и высшего порядков эпюр поперечных и изгибающих моментов имеет выпуклость, всегда направленную навстречу соответствующей распределенной нагрузке.

7. В сечении, расположенном на опоре, изгибающий момент равен нулю, если на данной опоре не приложен сосредоточенный момент. В последнем случае изгибающий момент будет равен величине этого сосредоточенного момента.

3.5.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ФОРМУЛА НАВЬЕ

Рассмотрим вопрос о связи напряжений σ с величиной изгибающего момента в сечении M . Определим удлинение волокна AB (рис. 3.42 - 3.43), расположенного на расстоянии z от нейтрального слоя, растянутого напряжениями σ . Первоначальная длина этого волокна $dx = O_1O_2 = \rho d\alpha$, рис. 3.42. После деформации его длина по дуге AB : $\overset{\sim}{AB} = (\rho + z)d\alpha$. Его абсолютное удлинение равно: $\Delta l = (\rho + z)d\alpha - \rho d\alpha = z d\alpha$. Его относительное удлинение равно: $\varepsilon = \frac{z d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{z}{\rho}$. Т.е. удлинения волокон пропорциональны их

расстояниям до нейтрального слоя. Радиус кривизны нейтрального слоя ρ , величину которого для выделенного (бесконечно малого) элемента считаем постоянной. Учитывая допущение о ненадавливании друг на друга волокон,

вычисление напряжений можно произвести по закону Гука, применяемому при растяжении-сжатии:

$$\sigma = E \varepsilon, \text{ или } \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \quad (3.61)$$

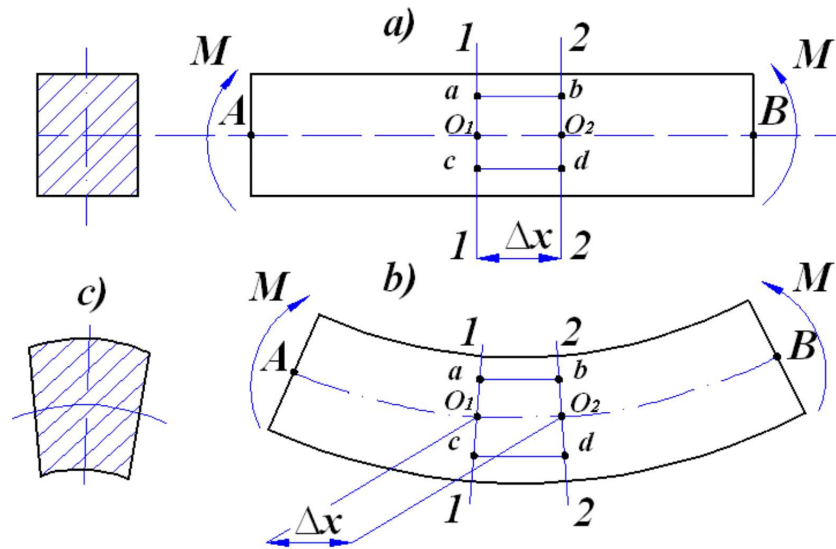


Рис. 3.42. Деформации волокон при изгибе

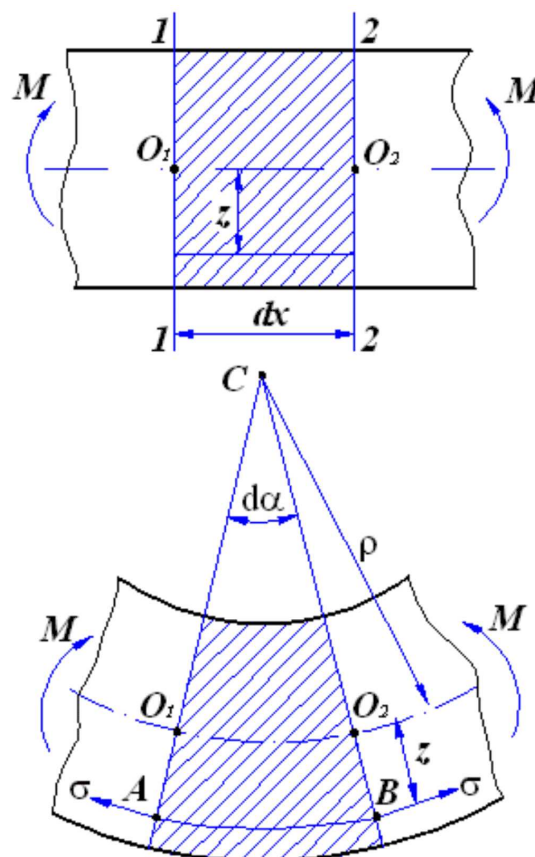


Рис. 3.43. К определению нормальных напряжений при изгибе

Таким образом, величина нормальных напряжений прямо пропорциональна расстоянию z от рассматриваемой точки до нейтрального

слоя. Следовательно, нормальные напряжения распределяются по сечению по линейному закону и наибольшими будут нормальные напряжения у верхнего и нижнего краев сечения, рис. 3.44.

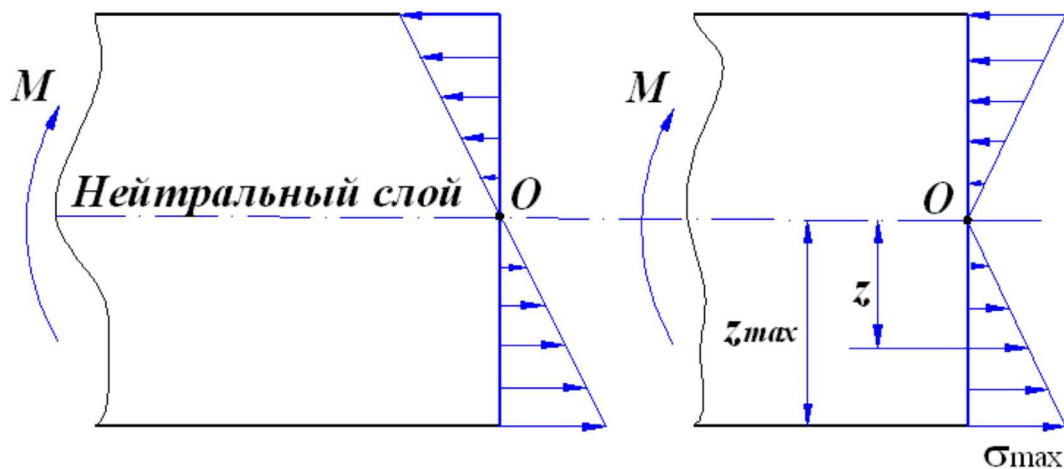


Рис. 3.44. Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению

В каждой точке поперечного сечения действуют нормальные напряжения σ , согласно формуле *Анри Навье*:

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \quad (3.62)$$

Таким образом, нормальные напряжения в любой точке сечения *прямо пропорциональны* величине изгибающего момента в сечении и *расстоянию* точки от нейтральной оси и *обратно пропорциональны* моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

3.5.5. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ ПО НАИБОЛЬШИМ ДОПУСКАЕМЫМ НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Подбор необходимого сечения балки при плоском изгибе в вертикальной плоскости по наибольшим нормальным напряжениям осуществляют из условия прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} z_{max}}{J_y} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (3.63)$$

Здесь $W_y = \frac{J}{z_{max}}$ - *момент сопротивления* поперечного сечения,

относительно нейтральной оси y ;

z_{max} - расстояние до волокна, наиболее удаленного от нейтральной оси y ;

$[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение;

M_{max} - наибольший по абсолютному значению изгибающий момент.

Расчетная формула на изгиб для подбора сечения в этом случае записывается в следующем виде:

$$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (3.64)$$

Для прямоугольного сечения

$$W_y = \frac{J_y}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; W_z = \frac{hb^2}{6}. \quad (3.65)$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{4}. \quad (3.66)$$

Максимальные нормальные напряжения не должны превышать допускаемые расчетные, более 5%.

При подборе сечений прокатных балок, а также балок, составленных из стандартных профилей, допускаются и более значительные отклонения в сторону увеличения запаса прочности.

Пример 3.10. Для консольной балки, схема которой показана на рис. 3.45, построить эпюры внутренних усилий, подобрать поперечное сечение в виде полой квадратной трубы, по ТУ-36-2287-80.

Подбор осуществить по наибольшим допускаемым нормальным напряжениям, исходя из того, что для материала балки $[\sigma] = 135 \text{ МПа}$.

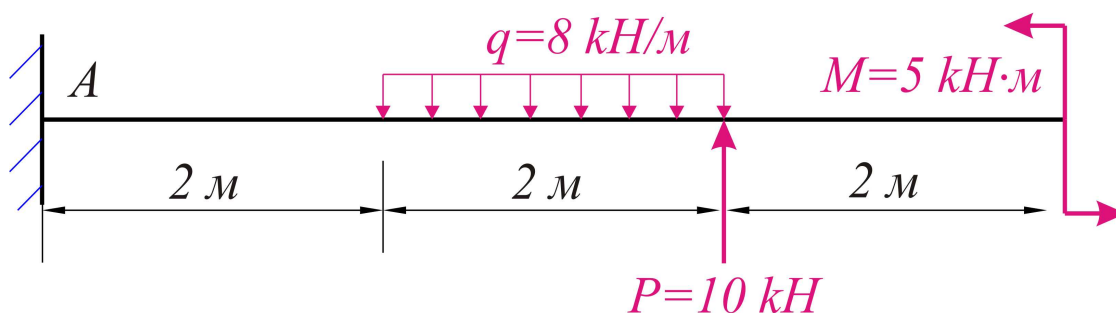


Рис. 3.45. К условию примера 3.10

Решение:

Разобьем консоль на три участка (рис. 3.46). Чтобы не определять опорные реакции заделки, будем использовать метод сечения справа.

Рассмотрим каждый участок в отдельности.

Составим уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для данных участков.

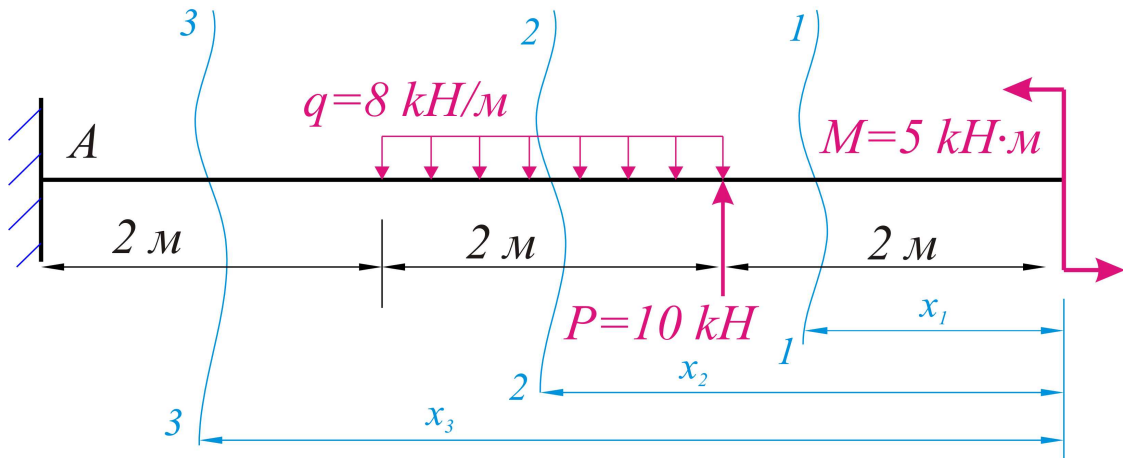


Рис. 3.46. Разбиение балки на участки (пример 3.10)

Первый участок.

Метод сечения справа,

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$Q_1 = 0;$$

$$M_1 = M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} = \text{const}.$$

Второй участок.

Метод сечения справа,

$$2 \leq x_2 \leq 4 \text{ м};$$

$$Q_2 = -P + q \cdot (x_2 - 2);$$

При $x_2 = 2 \text{ м} \rightarrow$

$$Q_2 = -P = -10 \text{ кН}.$$

При $x_2 = 4 \text{ м} \rightarrow$

$$Q_2 = -P = -10 + 8 \cdot (4 - 2) = 6 \text{ кН}.$$

Определим координату точки, в которой поперечная сила меняет свой знак в пределах данного участка.

Для этого приравняем уравнение поперечной силы на данном участке нулю:

$$Q_2 = -P + q \cdot (x_2 - 2) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{P}{q} + 2 \Rightarrow = \frac{10}{8} + 2 = 3,25 \text{ м};$$

Полученное значение мы будем использовать при построении эпюры изгибающего момента в качестве точки -экстремума.

$$M_2 = M + P \cdot (x_2 - 2) - \frac{q \cdot (x_2 - 2)^2}{2}.$$

$$\text{При } x_2 = 2 \text{ м} \rightarrow M_2 = 5 + 10 \cdot (2 - 2) - \frac{8 \cdot (2 - 2)^2}{2} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

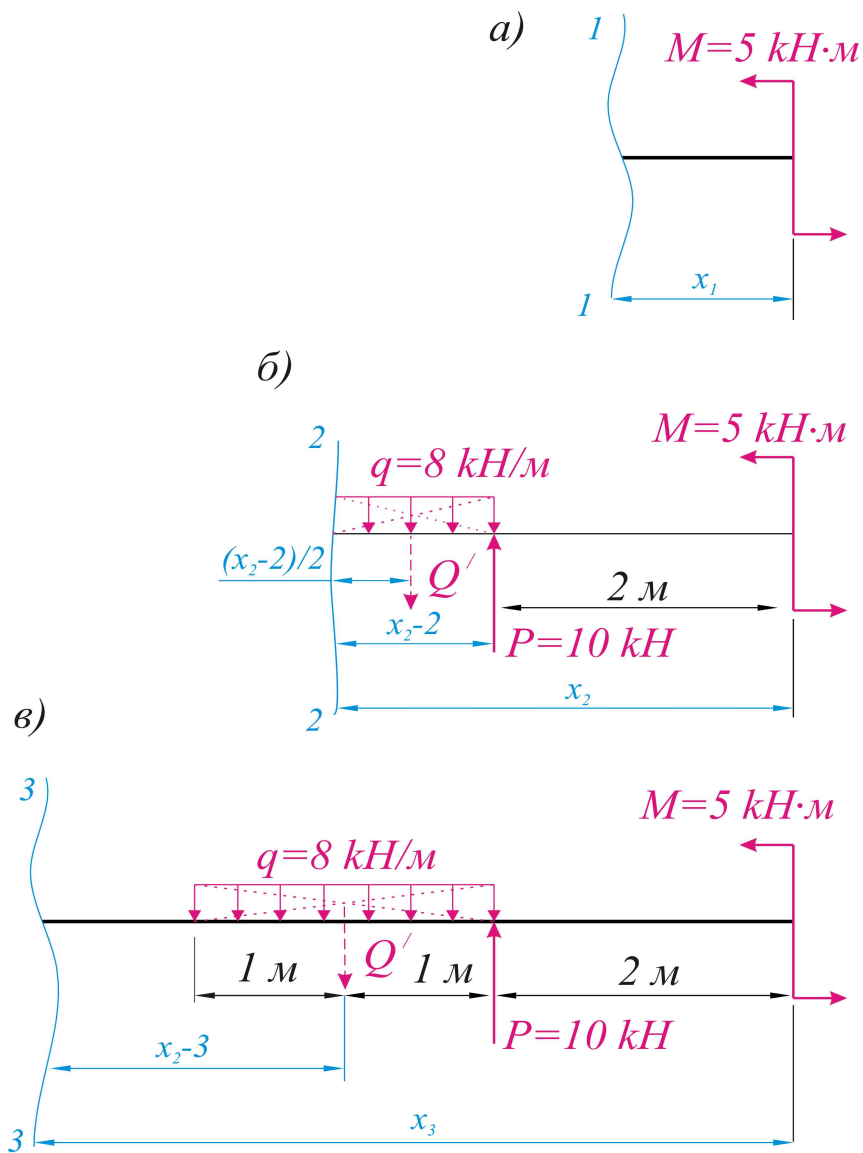


Рис. 3.47. Рассмотрение участков балки методом сечения справа (пример 3.10):
а) первый участок; б) второй участок; в) третий участок

При $x_2=3,25 \text{ м} \rightarrow M_2=5+10\cdot(3,25-2)-\frac{8\cdot(3,25-2)^2}{2}=11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

При $x_2=4 \text{ м} \rightarrow M_2=5+10\cdot(4-2)-\frac{8\cdot(4-2)^2}{2}=9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Третий участок.

Метод сечения справа, $4 \leq x_3 \leq 6 \text{ м}$:

$$Q_3 = -P + q \cdot 2 = -10 + 8 \cdot 2 = 6 \text{ кН} = \text{const}.$$

$$M_3 = M + P \cdot (x_3 - 2) - q \cdot 2 \cdot (x_3 - 3).$$

При $x_3=4 \text{ м} \rightarrow M_3=5+10\cdot(4-2)-8\cdot 2\cdot(4-3)=9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

При $x_3=6 \text{ м} \rightarrow M_3=5+10\cdot(6-2)-8\cdot 2\cdot(6-3)=-3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

На основании рассчитанных внутренних усилий на участках строим эпюру поперечной силы и изгибающего момента, рис. 3.48.

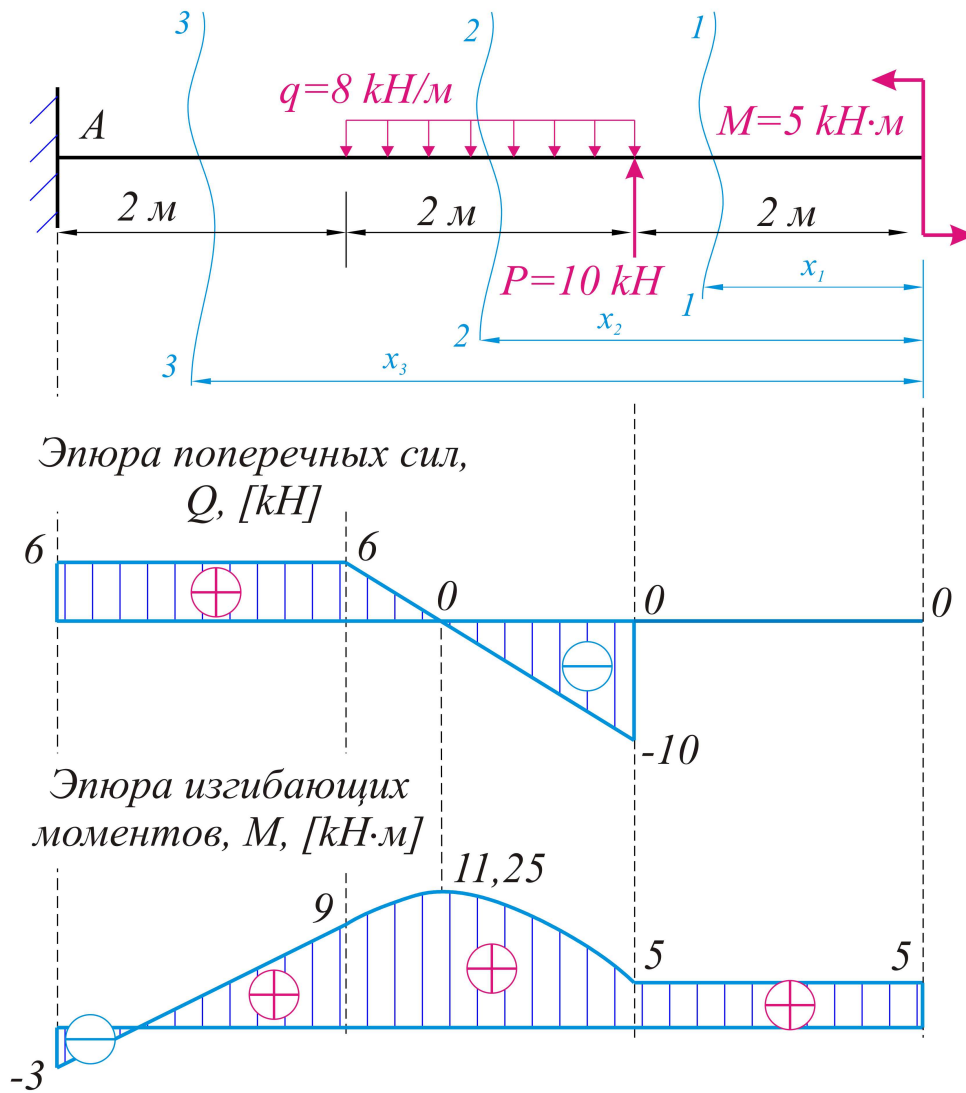


Рис. 3.48. Построение эпюр внутренних усилий (пример 3.10)

С учётом предлагаемого по условию метода расчёта, определяем опасное сечение бруса, как сечение с максимальным по абсолютной величине моментом. Такое сечение расположено на втором участке и соответствует координате, отсчитанной от крайней правой точки консоли $x_2 = 3,25 \text{ м}$, где $M = M_{max} = 11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определим потребный момент сопротивления W_y , используя формулу Анри Навье, из которой следует:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$W_y \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{135 \cdot 10^6} = 83,33 \cdot 10^{-6} [\text{м}^3], \text{ или } W_y \geq 83,33 \text{ см}^3.$$

Открываем приложение и ищем требуемый профиль с ближайшим большим моментом сопротивления относительно поперечной горизонтальной оси. Им оказывается профиль 120×5 , с $W_y = 84,6 \text{ см}^3$.

Задача решена.

РАЗДЕЛ IV. ДЕТАЛИ МАШИН

4.0. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧАХ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ ТРЕНИЕМ

Большинство современных машин состоит из трех частей: двигателя, механической передачи и исполнительного механизма.

Механическая передача – это механическое устройство, служащее для передачи энергии от двигателя к исполнительным органам машины, с одновременным преобразованием вращающего момента или вида движения. Необходимость применения механической передачи диктуется следующими обстоятельствами: источники энергии, как правило, работают в режиме высоких угловых скоростей, обеспечивающих им наибольшую мощность, наивысший КПД и малые габариты, а требуемая угловая скорость вала производственной машины обычно отличается от угловой скорости вала двигателя.

Механические передачи по способу передачи движения классифицируются на:

1. передачи трением (фрикционные; ременные);
2. передачи зацеплением (зубчатые; червячные; винтовые; цепные).

Основными параметрами механической передачи являются следующие параметры:

1. передаваемая мощность – P , кВт;
2. угловая скорость ведущего звена – ω_1 , с⁻¹;
3. передаточное число i , равное отношению угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев (или отношению частот вращения ведущего и ведомого звеньев):

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}; \quad (4.1)$$

4. механический КПД η , равный отношению полезной мощности передачи к затраченной мощности

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{затрач}}} = \frac{T_2 \cdot \omega_2}{T_1 \cdot \omega_1} = \frac{T_2}{T_1 i}, \quad (4.2)$$

или

$$T_2 = i \cdot T_1 \cdot \eta, \quad (4.3)$$

где T_1 и T_2 – вращающие моменты, для ведущего и ведомого звена.

На основе формулы (4.3) можно сделать важный вывод о том, что применение механической передачи позволяет получить значительный выигрыш в силе. Простейшей механической передачей является фрикционная передача.

4.1. ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фрикционная передача - это передача, в которой движение от одного вала к другому передаётся за счет трения, возникающего в месте контакта вращающихся катков. Для создания достаточной силы трения, обеспечивающей передачу заданного момента от ведущего вала к ведомому, фрикционные катки должны быть прижаты друг к другу силой S . Для этих целей применяются различные нажимные устройства: основанные на использовании силы тяжести, с применением пружин, с использованием системы рычагов, с применением гидроцилиндров и др.

Достоинства фрикционных передач:

1. простота конструкции и обслуживания;
2. плавность передачи движения и бесшумность работы;
3. возможность бесступенчатого регулирования скорости без остановки машины;
4. за счет возможностей пробуксовки катков при перегрузках передача предохраняет механизм привода от поломок.

Недостатки:

1. непостоянство передаточного числа из-за проскальзывания катков;
2. сравнительно большие нагрузки на валы и их опоры;
3. сравнительно низкий КПД - $\eta = 0,7 \dots 0,95$;
4. необходимость применения нажимных устройств.

Фрикционные передачи применяются в кузнечно-прессовом оборудовании (фрикционные прессы), в подъемно-транспортных машинах (приводные рольганги), в бесцентрово-шлифовальных станках, в буровой технике (фрикционные лебедки), в приборах и аппаратах, в приводах текстильных и транспортных машин и т.д.

Простейшая фрикционная передача между параллельными валами состоит из двух цилиндрических катков, прижатых один к другому с заданной силой (рис. 4.1). Нормальная работа (без буксования) фрикционной передачи будет обеспечена, если сила трения F , возникающая между катками, будет больше передаваемого окружного усилия F_t , т.е. условием работоспособности передачи является следующее:

$$F \geq F_t. \quad (4.4)$$

Для большей надежности против буксования вводят коэффициент запаса сцепления $K_{сц}$, принимаемый для силовых передач в пределах $K_{сц} = 1,25 \dots 2,0$, и требуемое нормальное усилие Q в месте касания катков, определяют по формуле:

$$Q = \frac{K_{сц}}{f} \cdot F_t, \quad (4.5)$$

где f - коэффициент трения.

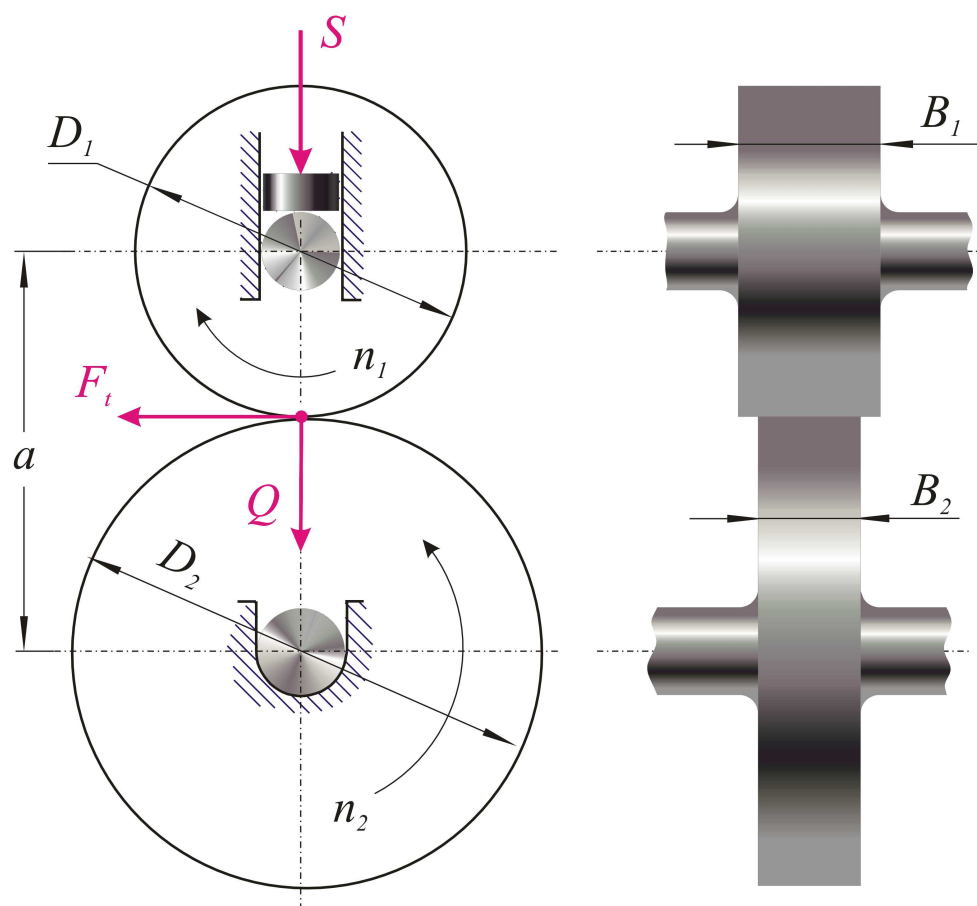


Рис. 4.1.Схема простейшей фрикционной передачи

В целях уменьшения нажимного усилия, которое вызывает значительные потери на трение в подшипниках и ограничивает величину передаваемых мощностей, материалы для катков целесообразно брать с возможно большим коэффициентом трения. При выборе коэффициента трения f можно руководствоваться данными, приведенными в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Значение коэффициента трения в зависимости от материалов катков

Материал катков	f
Сталь по стали или по чугуну со смазкой	0,04...0,05
Чугун по: стали или по чугуну всухую текстолиту всухую	0,1...0,18 0,15...0,25
коже всухую	0,20...0,50
прессованной бумаге всухую	0,40...0,05
резине всухую	0,35...0,70
ферродо	0,30...0,3

4.2. ВИДЫ ФРИКАЦИОННЫХ ПЕРЕДАЧ

Существуют следующие виды фрикционных передач. Фрикционные передачи внешнего и внутреннего касания (рис.4.2, *a* и *з*), лобовые (рис.4.2, *в*), торовые (рис.4.2, *б*).

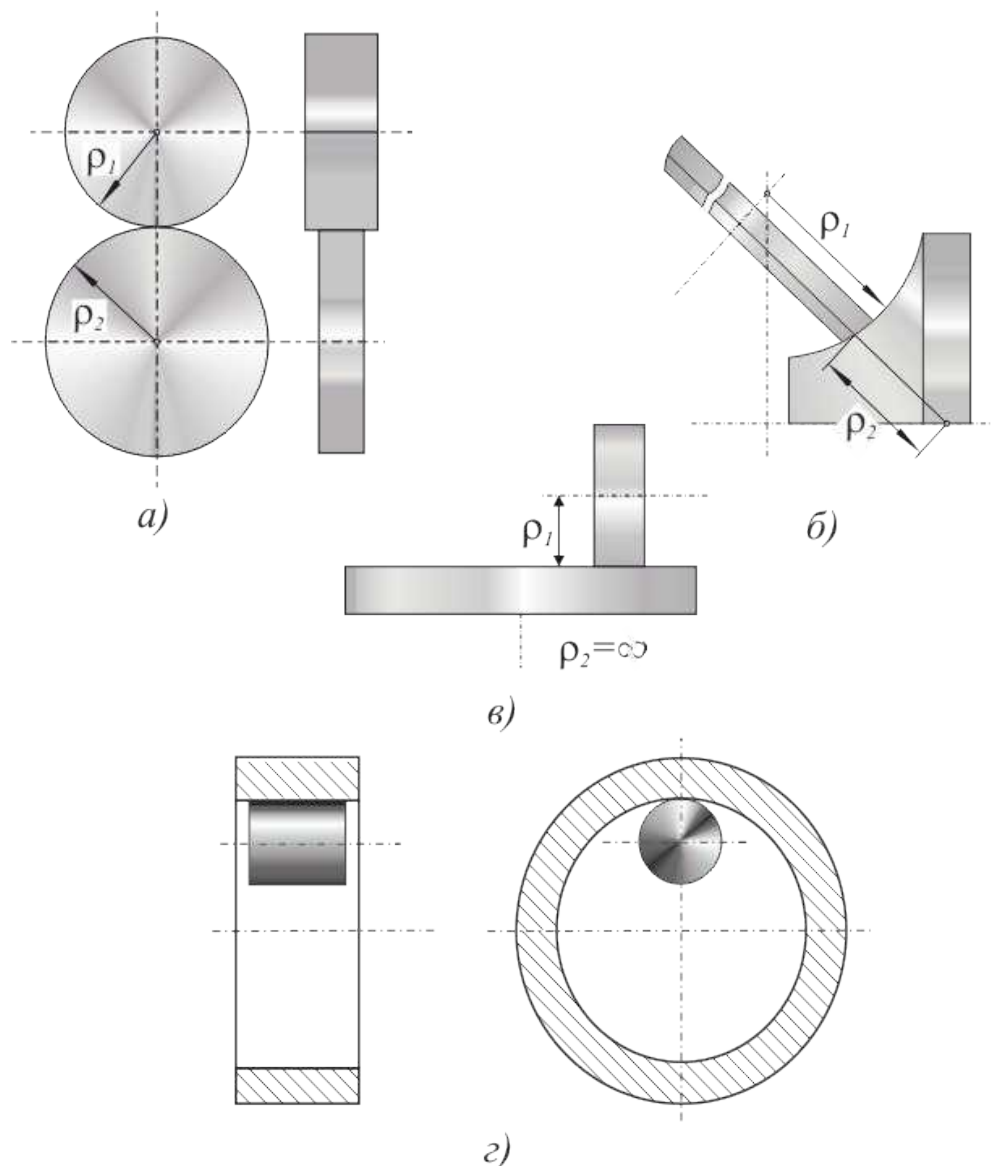


Рис.4.2. Виды фрикционных передач: *a*) внешнего зацепления; *б*) торовая; *в*) лобовая; *з*) внутреннего зацепления

На рисунке 4.2 также показаны радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 контактирующих тел.

4.3. ФРИКЦИОННЫЕ ВАРИАТОРЫ

Вариаторы предназначены для плавного, бесступенчатого изменения на ходу угловой скорости ведомого вала при постоянной угловой скорости ведущего вала. В современном машиностроении применяется большое число

вариаторов, выполненных по различным принципиальным схемам (в станках, в конвейерах, в прессах и т.п.).

В зависимости от формы тел качения различают вариаторы *лобовые* (рис.4.3, *а*), *конусные* (рис. 4.3, *б*). В лобовых вариаторах (см. рис. 4.3, *а*) бесступенчатое изменение угловой скорости ведомого вала достигается передвижением ведущего катка вдоль вала, т.е. изменением рабочего радиуса R_2 одного рабочего тела.

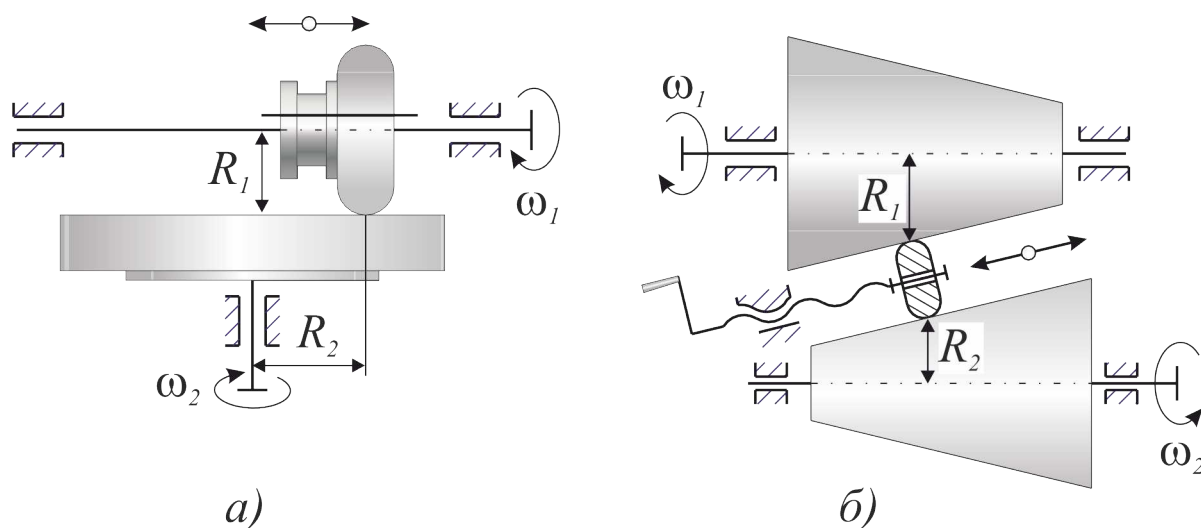


Рис 4.3. Схемы конструкций вариаторов

В конусном вариаторе регулирование скорости осуществляется одновременным изменением рабочих радиусов обоих тел.

На рис. 4.3, *б* показана схема вариатора с коническими катками и промежуточным цилиндрическим диском, свободно вращающимся на оси. При перемещении промежуточного диска с помощью винтового механизма изменяются радиусы R_1 и R_2 .

Эти вариаторы наиболее компактны и совершенны, но имеют сложную конструкцию и требуют высокой точности изготовления.

4.4. МАТЕРИАЛЫ КАТКОВ

К материалам трущихся поверхностей катков предъявляют следующие требования: высокое значение коэффициента трения, высокое значение модуля упругости, высокая контактная прочность и износостойкость. Катки фрикционных передач изготавливают из однородных или разнородных материалов. При этом целесообразно выполнять ведомый каток из более износостойкого материала. Применяют следующие сочетания материалов:

1. Закаленная сталь по закаленной стали (стали марок ШХ15, 40ХН, 18ХГТ и др.) для быстроходных силовых передач. Такое сочетание обеспечивает наибольшую компактность передачи, но требует наиболее точного изготовления и более высокой чистоты рабочих поверхностей.
2. Чугун по чугуну (СЧ 15; СЧ 18; СЧ 21 и др.) или чугун по стали для открытых тихоходных силовых передач. Чаще применяют чугун по стали,

что обеспечивает меньший шум при работе передачи.

3. Текстолит, гетинакс или фибра по стали или по чугуну для малонагруженных открытых передач, не требующих большой долговечности. Такое сочетание материалов позволяет уменьшить требования к качеству обработки контактирующих поверхностей, так как они хорошо прирабатываются.
4. Кожа, резина, прорезиненная ткань, ферродо, пластмассы по стали или по чугуну для передачи незначительных моментов. Один из катков изготавливают из стали или чугуна (чаще ведомый), а второй покрывают одним из перечисленных неметаллических материалов.

4.5. СИЛА НАЖАТИЯ КАТКОВ

Для определения силы нажатия S можно исходить из мощности P_1 (Bm) на ведущем валу. Тогда для катков с гладким цилиндрическим ободом (см. рис.4.1) сила нажатия, равная нормальному к опорной поверхности давлению, будет

$$S=Q=\frac{K_{cu} \cdot F_t}{f}=\frac{K_{cu} \cdot 2 T_1}{f \cdot D_1}, \quad (4.6)$$

где T_1 - момент крутящий ведущего катка, $H \cdot m$.

Учитывая выражение $D_1=\frac{2a}{(i \pm 1)}$ и подставив его в формулу для S , получим

$$S=Q=\frac{K_{cu} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{f \cdot a}. \quad (4.7)$$

В последних формулах знак плюс - для внешнего, знак минус - для внутреннего касания катков.

4.6. РАСЧЕТ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КАТКОВ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Сила нажатия катков S , необходимая для обеспечения работоспособного состояния фрикционной передачи, вызывает на опорной поверхности катков значительные *контактные напряжения* σ_H , (рис. 4.4).

Основным критерием работоспособности фрикционных передач с металлическими катками является *усталостная прочность*, которая оценивается величиной контактных напряжений. При нажатии силой S в месте контакта металл катков деформируется; в результате упругой деформации получается прямоугольная площадка контакта, имеющая весьма малую ширину. По ширине контактной площадки напряжения распределены по эллиптическому закону, достигая максимума в точках средней линии контактной площадки.

Для материалов, подчиняющихся закону Гука, величину наибольших контактных напряжений определяют по *формуле Герца*

$$\sigma_H = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot E}{\rho}}, \quad (4.8)$$

где q - удельная контактная нагрузка; $E = \frac{2 E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ - приведенный модуль упругости; $\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ - приведенный радиус кривизны.

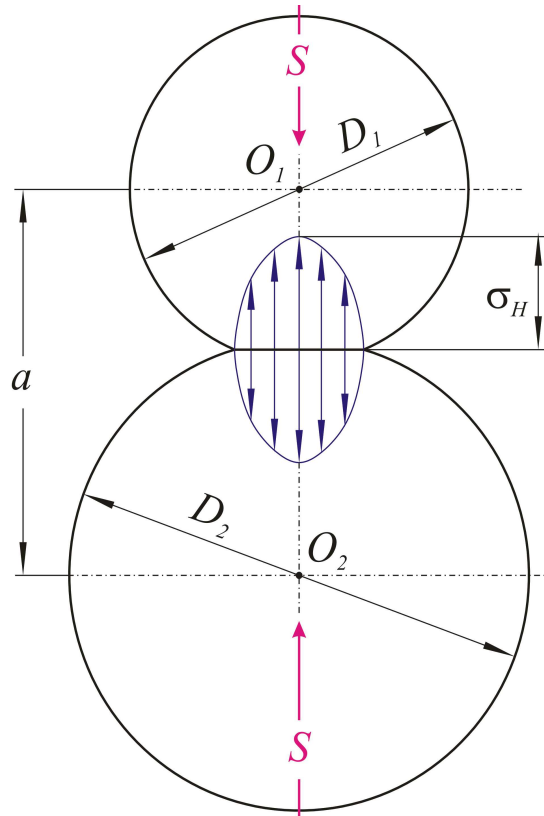


Рис. 4.4. Эпюра контактных напряжений

Расчет на прочность катков силовых фрикционных передач сводится к определению размеров катков из условия ограничения величины контактных напряжений смятия. Условие для предотвращения усталостного выкрашивания, т.е. условие контактной прочности, имеет вид

$$\sigma_H \leq [\sigma_H], \quad (4.9)$$

где $[\sigma_H]$ - допускаемое контактное напряжение для материала катков.

Для цилиндрических катков с гладким ободом удельная контактная нагрузка определяется следующим образом:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{K_{cu} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{b \cdot f \cdot a}. \quad (4.10)$$

Приведенный радиус кривизны

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{i \cdot D_1}{2(i+1)} = \frac{a \cdot i}{(i+1)^2}. \quad (4.11)$$

Подставив указанные значения q, p, b, E в условие контактной прочности и обозначив $\frac{b}{a} = \psi$, получим формулу проектного расчета

$$a \geq (i+1) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{[\sigma_H]}\right)^2 \cdot \frac{K_{cy} \cdot T_1 \cdot E}{f \cdot i \cdot \psi}}. \quad (4.12)$$

Коэффициент ширины катков ψ обычно принимают $\psi = 0,2 \dots 0,4$.

4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКАЕМОГО КОНТАКТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

На основе экспериментов установлена связь между длительным пределом контактной выносливости материала σ_H (и, соответственно, допускаемым контактным напряжением $[\sigma_H]$) и твердостью поверхности - характеристикой, наиболее активно влияющей на усталостную прочность материалов фрикционных катков:

$$[\sigma_H] = C_B \cdot HB; \quad [\sigma_H] = C_R \cdot HRC, \quad (4.13)$$

где C_B и C_R - коэффициенты, зависящие от материала и термообработки; HB и HRC - числа твердости, соответственно, по Бриннелю и по Роквеллу.

При расчетах катков на контактную прочность допускаемое напряжение $[\sigma_H]$ определяют с помощью зависимостей, приведенных в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Значение допускаемого напряжения

Материал катков	$[\sigma_H], H/мм^2$	$E, H/мм^2$
Сталь среднеуглеродистая (HB= 180-350)	(2,5...3,0) HB	$2,15 \cdot 10^5$
Сталь углеродистая и легированная (HRC-40-63)	(22,0...31,0) HRC	$2,15 \cdot 10^3$
Чугун серый и модифицированный (HB= 170-270)	(1,5...1,8) HB или $1,5 \sigma_{BH}$	$1,1 \cdot 10^5$
Текстолит	50,0...90,0	$(5...6) \cdot 10^3$

4.8. ПОТЕРИ НА ТРЕНИЕ, КПД И РАСЧЕТ ФРИКЦИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ НА НАГРЕВ

В фрикционных передачах, не имеющих геометрического скольжения, общая потерянная мощность Π (Bm) равна:

$$\Pi = \Pi_z + \Pi_c + \Pi_n, \quad (4.14)$$

где Π_z - потери на гистерезис при перекатывании катков;

Π_c - потери на упругое скольжение;

Π_n - потери в подшипниках.

Из курса теории механизмов и машин Π_z определяются:

$$\Pi_z = Q \cdot k \cdot \frac{\pi}{300} \cdot (n_1 + n_2), \quad (4.15)$$

где k - коэффициент трения качения, $мм$.

После подстановки сюда значения Q из уравнения (4.7) получим

$$\Pi_z = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1) \cdot k \cdot \pi}{f \cdot a \cdot 300} \cdot (n_1 + n_2). \quad (4.16)$$

Потери на упругое скольжение находят по формуле

$$\Pi_c = F_i \cdot \varepsilon \cdot V, \quad (4.17)$$

где $\varepsilon = \frac{V_{ск}}{V}$ - относительная величина упругого скольжения, обычно принимают

$$\varepsilon = 0,02 \dots 0,03.$$

Потери на трение в подшипниках качения определяют по формуле:

$$\Pi_n = \frac{F_r \cdot f \cdot \pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60}, \quad (4.18)$$

где f - «приведенный» к валу коэффициент трения.

Для приближенных расчетов можно принимать для подшипников всех типов $f = 0,005 - 0,01$.

d - диаметр вала, $мм$;

n - частота вращения, $об/мин$;

F_r - действующая на подшипник нагрузка, H .

КПД передачи определяется по формуле

$$\eta = \frac{P_1 - \Pi}{P_1} = 1 - \frac{\Pi}{P_1}. \quad (4.19)$$

Для нормального функционирования фрикционной передачи важным является обеспечение определенного температурного режима работы, т.к. последний часто ограничивает ее работоспособность, диктует конструкцию и размеры, а также выбор материалов и требования, предъявляемые к смазке.

Тепловой расчет передачи сводится к составлению условия теплового баланса, с помощью которого устанавливается соответствие между количеством выделяемого и количеством отводимого тепла в процессе работы.

Полагаем, что вся потерянная в передаче мощность P полностью превращается в тепло, количество которого составляет

$$\Phi = P_1 \cdot (1 - \eta). \quad (4.20)$$

В закрытых передачах, работающих в масле, необходимая для отвода тепла при установившемся тепловом режиме поверхность охлаждения

$$A = \frac{P_1 \cdot (1 - \eta)}{K_T \cdot (t_1 - t_0)}, \text{ м}^2, \quad (4.21)$$

где K_T - коэффициент теплоотдачи; t_1 - температура масла, °C;
 t_0 - температура окружающего воздуха.

Если поверхность спроектированного корпуса передачи меньше поверхности A , найденной из этой формулы, необходимо увеличить охлаждающую поверхность, например, посредством оребрения корпуса.

4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК НА ВАЛЫ

Схема сил, действующих в передачах гладкими или клинчатыми фрикционными катками с параллельными валами, показана на рис. 4.5.

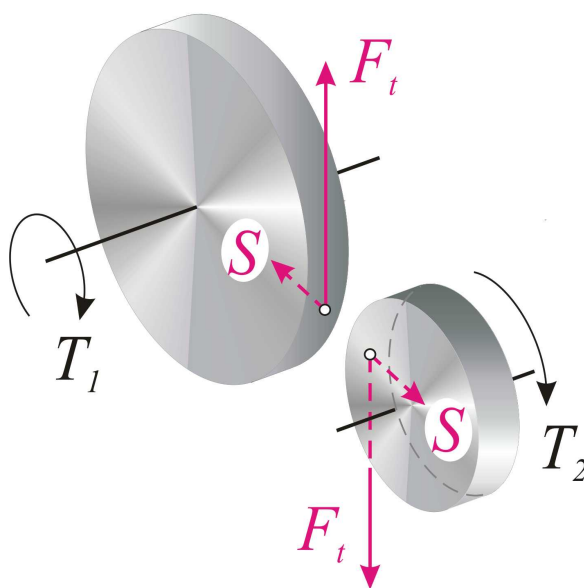


Рис. 4.5. Схема усилий для передачи с гладкими фрикционными катками

Давления на валы ведущего и ведомого катков

$$F_{R_1} = F_{R_2} = \sqrt{F_t^2 + S^2}. \quad (4.22)$$

Для колес с гладким ободом усилие нажатия равно нормальному давлению, т.е. $S = Q = \frac{K_{cy}}{f} \cdot F_t$, следовательно,

$$F_{R_1} = F_{R_2} = F_t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{K_{cy}}{f}\right)^2}. \quad (4.23)$$

Для клинчатых катков $S = \frac{K_{cy}}{f} \cdot F_t \cdot \sin \alpha$ и

$$F_{R_1} = F_{R_2} = F_t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{K_{cy}}{f} \cdot \sin \alpha\right)^2}. \quad (4.24)$$

4.10. РАСЧЁТ ВАЛОВ

Катки фрикционной передачи устанавливаются на валах, которые предназначены для поддержки катков и передачи вращающих моментов.

Валы фрикционной передачи, под действием вращающего момента T и радиальной силы F_R , испытывают деформации кручения и изгиба.

При проектном расчете валов отсутствуют полные данные для определения изгибающего момента в рассматриваемом сечении вала.

Так, например, неизвестно расположение опор и места приложения нагрузок на вал. Поэтому диаметр вала приближенно оценивают из расчета только на кручение.

При этом расчете влияние изгиба на прочность вала компенсируется понижением допускаемых напряжений на кручение $[\tau_k]$.

Условие прочности вала на кручение:

$$\tau_k = \frac{T}{W_p} \leq [\tau_k], \quad (4.25)$$

где τ_k - расчетное напряжение кручения, МПа;

T - передаваемый крутящий момент, Н·мм;

$W_p \approx 0,2 d^3$ - полярный момент сопротивления поперечного сечения вала, мм³;

$[\tau_k]$; - допускаемое напряжение на кручение, МПа;

$[\tau_k] = 10 \dots 25$ МПа - для валов из сталей Ст.5, Ст.6, 35, 40, 45.

Из условия прочности (4.25) получаем следующую формулу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_k]}}. \quad (4.26)$$

Полученные значения d округляют до ближайшего стандартного значения по ГОСТ 6636-69.

4.11. ВЫБОР ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Опорами для валов фрикционной передачи обычно служат подшипники качения, которые воспринимают приложенные к валу радиальные (и осевые) нагрузки и сохраняют заданное положение оси вращения вала.

Подшипник качения (рис. 4.6) состоит из наружного 1 и внутреннего 4 кольца с дорожками качения A ; шариков и роликов (тел качения) 3, которые катятся по дорожкам качения колец; сепаратора 2, разделяющего и направляющего шарики или ролики, что обеспечивает их правильную работу.

Основные достоинства подшипников качения: малое трение и простота обслуживания. Эти преимущества подшипников качения обеспечивают им широкое распространение в различных областях машиностроения и приборостроения. Подшипники качения стандартизованы.

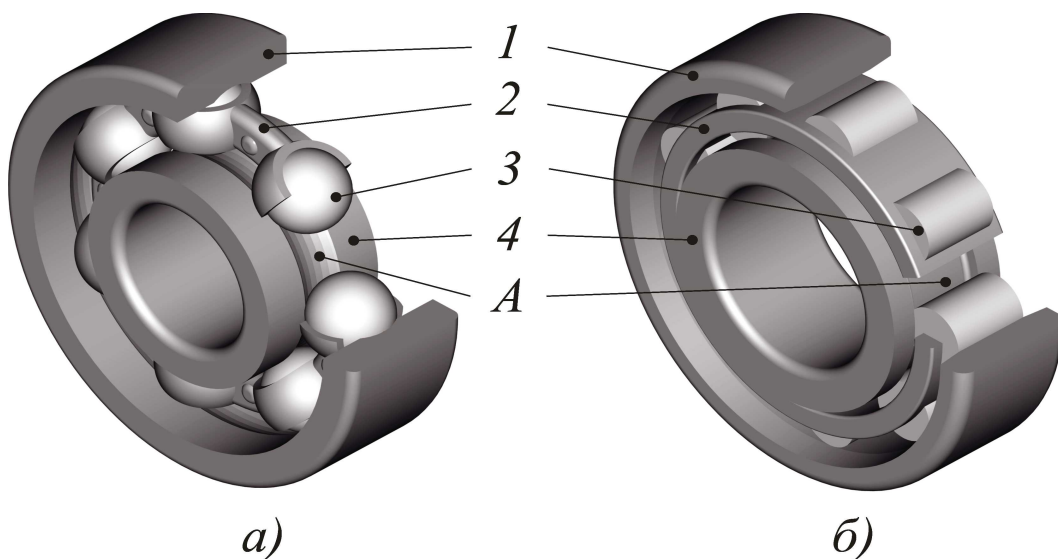


Рис. 4.6. Подшипники качения:
а) шарикоподшипник; б) роликоподшипник

Под действием радиальной силы F_R , возникающей при работе фрикционной передачи, на подшипник качения действует радиальная опорная реакция, рис. 4.7.

Силы R_A и R_B могут быть найдены из условий равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

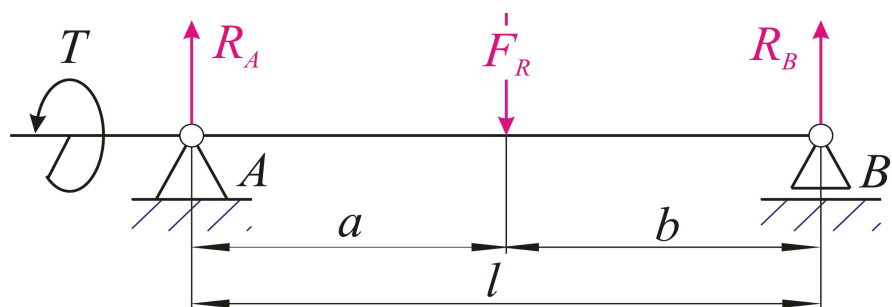


Рис 4.7. Расчётная схема для определения усилий в подшипниках

Выбор подшипников качения по динамической грузоподъемности C .

Динамическая грузоподъемность C – это такая постоянная нагрузка, которую подшипник может выдержать в течение 1 млн. оборотов без появления признаков усталости материала подшипника. Значения C приведены в каталогах на подшипники качения.

Динамическая грузоподъемность C и ресурс подшипника L связаны следующей зависимостью:

$$L = \left(\frac{C}{P_{\text{э}}} \right)^p, \quad (4.27)$$

где L – долговечность подшипника, млн. оборотов;

C – динамическая грузоподъемность, кН;

$P_{\text{э}}$ – эквивалентная нагрузка, кН;

$p=3$ – для шарикоподшипников, и $p=10/3$ – для роликоподшипников.

Эквивалентную нагрузку определяют таким образом:

$$P_{\text{э}} = R_{A,B} \cdot V \cdot K_B \cdot K_T, \quad (4.28)$$

где $R_{A,B}$ – наибольшая радиальная нагрузка на подшипник;

V – коэффициент кольца, учитывающий, какое кольцо подшипника вращается (внутреннее или внешнее);

K_B – коэффициент безопасности, учитывающий характер нагрузки на подшипник;

K_T – температурный коэффициент.

Указанные коэффициенты находятся по справочнику.

Долговечность подшипника L_h в часах определяется по формуле:

$$L_h = \frac{10^6 \cdot L}{60 \cdot n} = \frac{10^6}{60 \cdot n} \left(\frac{C}{P_{\text{э}}} \right)^p, \quad (4.29)$$

где n – частота вращения вала, мин⁻¹.

Зная диаметр вала $d_{\text{п}}$ в месте посадки подшипника, по каталогу

выбирают стандартный подшипник соответствующего типа, внутренний диаметр d равен размеру вала d_{II} .

Расчетную долговечность L_h выбранного подшипника определяют по формуле (4.29). Затем производят сравнение расчетной долговечности подшипника с рекомендуемым значением L_h для конкретного типа машины, которое приводится в таблицах [26, 27, 30]; должно выполняться условие:

$$L_{h \text{ расч}} \geq L_{h \text{ табл}} . \quad (4.30)$$

Если условие (4.30) не выполняется, то производят замену подшипника на подшипник другой серии с большей динамической грузоподъемностью C .

4.12. РАСЧЕТ ШПОНОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Для передачи вращающего момента валы с фрикционными катками соединяются призматическими шпонками со скругленными торцами. Шпоночное соединение показано на рис. 4.8.

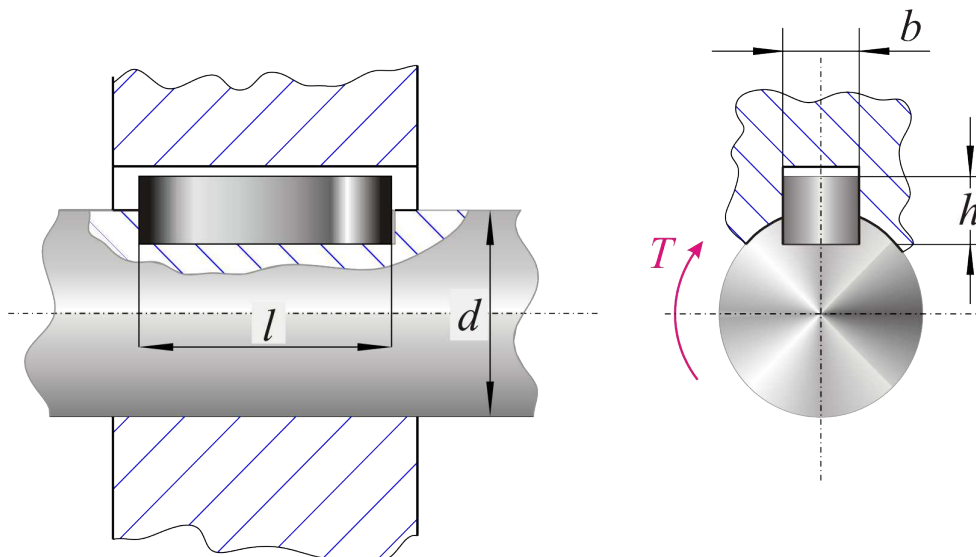


Рис 4.8. Пример шпоночного соединения

Шпонки выполняются из стали, имеющей предел прочности $\sigma_s \geq 500 \text{ Н/мм}^2$, в частности из стали марки 45 нормализованной.

Призматические шпонки стандартизованы (ГОСТ 23360-78) и выбираются по диаметру вала в месте посадки деталей (катков, зубчатых колес, звездочек и др.).

Длину шпонки l принимают конструктивно, согласуя ее с шириной детали, сидящей на валу (в частности, с шириной катка).

Шпонки подлежат проверке на прочность.

Вращающий момент с вала на каток передается боковыми гранями шпонки, которые испытывают деформацию смятия.

Условие прочности шпонки на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (4.31)$$

где $\sigma_{см}$ - расчетное напряжение смятия, МПа;

F - окружная сила, действующая на шпонку, Н;

$A_{см}$ - площадь смятия шпонки, МПа;

$[\sigma_{см}]$ - допустимое напряжение смятия;

$[\sigma_{см}] = 100 \dots 120 \text{ Н/мм}^2$.

Таким образом, условие прочности шпонки на смятие примет вид:

$$\sigma_{см} = \frac{T}{0,25 \cdot d \cdot h \cdot (l - \delta)} \leq [\sigma_{см}]. \quad (4.32)$$

Пример 4.1

Рассчитать фрикционный редуктор привода толкателя, предназначенного для подачи стальных заготовок в нагревательную печь (рис. 4.9), по следующим данным:

$P_2 = 6,75 \text{ кВт}$ - мощность на ведомом валу редуктора;

$\omega_1 = 51 \text{ с}^{-1}$ - угловая скорость ведущего вала редуктора;

$i = 3$ - передаточное число редуктора;

$\eta = 0,9$ - механический КПД редуктора.

Материал катков - сталь 40Х (улучшенная); твердость после термообработки НВ=285.

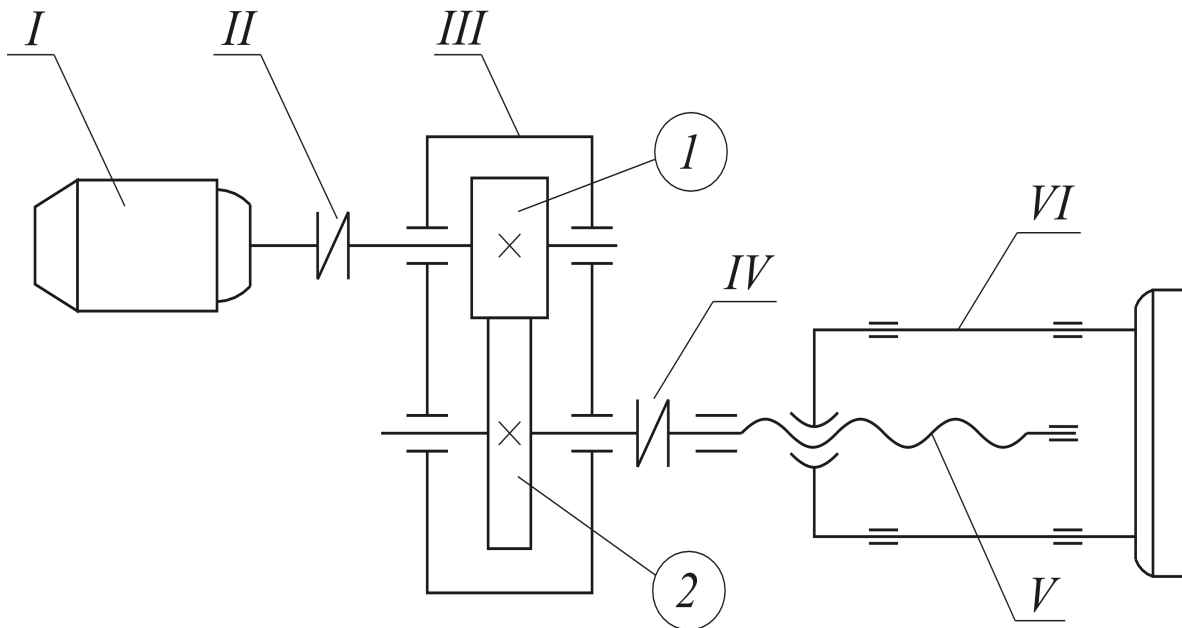


Рис. 4.9. Схема привода: I - электродвигатель; II, IV - муфты; III - редуктор; V - винт толкателя; VI - толкатель

Расчёт катков

Решение

1. Принимаем коэффициент трения $f = 0,05$ (стальные катки, работающие в масле).

2. Принимаем коэффициент ширины катков $\psi = b/a = 0,3$ (a – межосевое расстояние).

3. Определение допускаемого контактного напряжения

$$[\sigma_n] = 2 \cdot HB + 70, \text{ МПа};$$

$$[\sigma_n] = 2 \cdot 285 + 70 = 640, \text{ МПа}.$$

4. Определение вращающих моментов на валах

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i} = \frac{51}{3} = 17 \text{ с}^{-1};$$

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot 10^3}{\omega_2} = \frac{6,75 \cdot 10^3}{17} = 4,0 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_1 = \frac{T_2}{i \cdot \eta} = \frac{4,0 \cdot 10^2}{3,0 \cdot 0,9} = 140 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Определение межосевого расстояния

$$a = (i + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{[\sigma_n]}\right)^2 \frac{T_1 \cdot K_{cu} \cdot E}{\psi \cdot i \cdot f}}.$$

Принимаем $K_{cu} = 1,5$; $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Н/мм}^2$ – для стали.

$$a = (3,0 + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{640 \cdot 10^6}\right)^2 \frac{140,0 \cdot 1,5 \cdot 210 \cdot 10^9}{0,3 \cdot 3,0 \cdot 0,05}} = 0,303 \text{ м}.$$

6. Определение диаметров катков

$$D_1 = \frac{2a}{i + 1} = \frac{2 \cdot 303}{3,0 + 1} = 151 \text{ мм}.$$

Принимаем $D_1 = 160 \text{ мм}$.

$$D_2 = D_1 \cdot i (1 - \varepsilon) = 160 \cdot 3,0 (1 - 0,01) = 475,2 \text{ мм}.$$

$\varepsilon = 0,01$ – коэффициент скольжения.

Принимаем $D_2 = 480 \text{ мм}$.

7. Определение фактического межосевого расстояния

$$a = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{160 + 480}{2} = 320 \text{ мм}.$$

8. Отклонение от заданного значения i составляет 0,7%, что вполне допустимо.

Определение окружной скорости катков

$$V = 0,5 \cdot \omega_1 \cdot D_1 = 0,5 \cdot 51 \cdot 0,160 = 4,1 \text{ м/с}.$$

Допустимая скорость

$V_{\max} = 15 \dots 20 \text{ м/с}$ – при работе катков в масле.

9. Определение ширины катков

$$b_2 = \psi \cdot a = 0,3 \cdot 320 = 96 \text{ мм};$$

$$b_1 = b_2 + (4 \dots 5) \text{ мм};$$

$$b_1 = 96,0 + 4,0 = 100 \text{ мм}.$$

10. Определение окружной силы

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 140}{0,16} = 1850 \text{ Н}.$$

11. Определение силы натяжения

$$S = K_{cy} \cdot \frac{F_t}{f} = 1,5 \frac{1850}{0,05} = 55500 \text{ Н}.$$

12. Определение радиальной нагрузки на вал

$$F_R = \sqrt{F_t^2 + S^2} = \sqrt{(1,85 \cdot 10^3)^2 + (55,5 \cdot 10^3)^2} = 55530 \text{ Н}.$$

Расчет валов

13. Принимаем материал валов сталь 45, для которой $[\tau_k] = 15 \dots 20 \text{ Н/мм}^2$.

Ведущий вал

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{140 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20,0}} = 15,2 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_1 = 18 \text{ мм}$. (ГОСТ 6636-69).

Конструктивно принимаем:

$d_{\text{пл}} = 25 \text{ мм}$ – диаметр вала в месте посадки подшипников;

$d_{\text{кл}} = 30 \text{ мм}$ – диаметр вала в месте посадки ведущего катка.

Принимаем шарикоподшипники радиальные однорядные средней серии № 305 ($d = 25 \text{ мм}$; $D = 62 \text{ мм}$; $B = 17 \text{ мм}$).

$l_1 = 1,8d_1 = 1,8 \cdot 18 = 32 \text{ мм}$;

$l_2 = l_4 = B = 17 \text{ мм}$;

$l_3 = b_1 + 10 \text{ мм} = 100 + 10 = 110 \text{ мм}$.

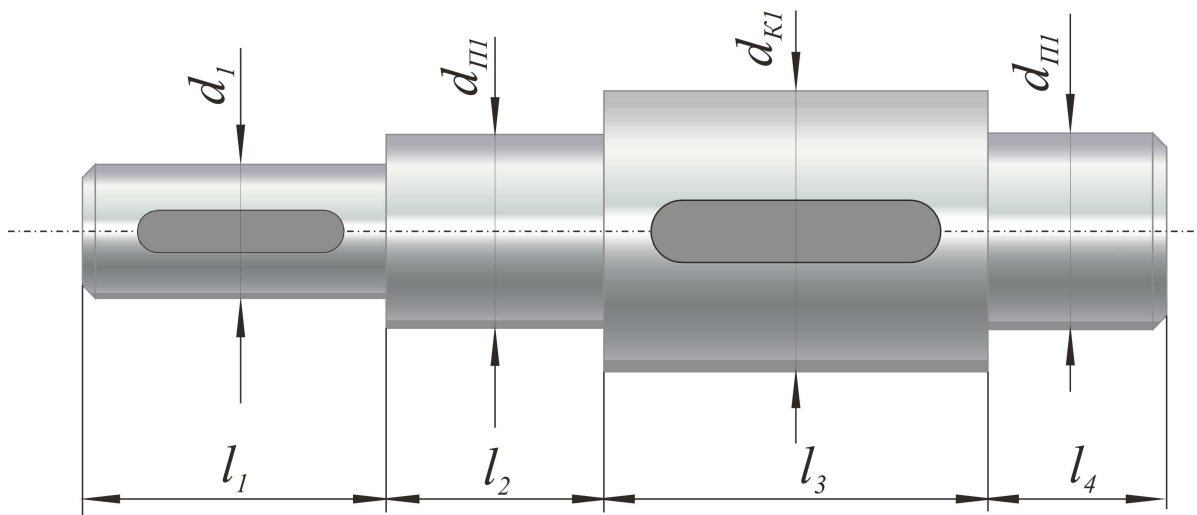


Рис. 4.10. Конструкция ведущего вала

Ведомый вал

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 20}} = 45 \text{ мм.}$$

Принимаем $d_2 = 45 \text{ мм}$ (ГОСТ 6636-69).

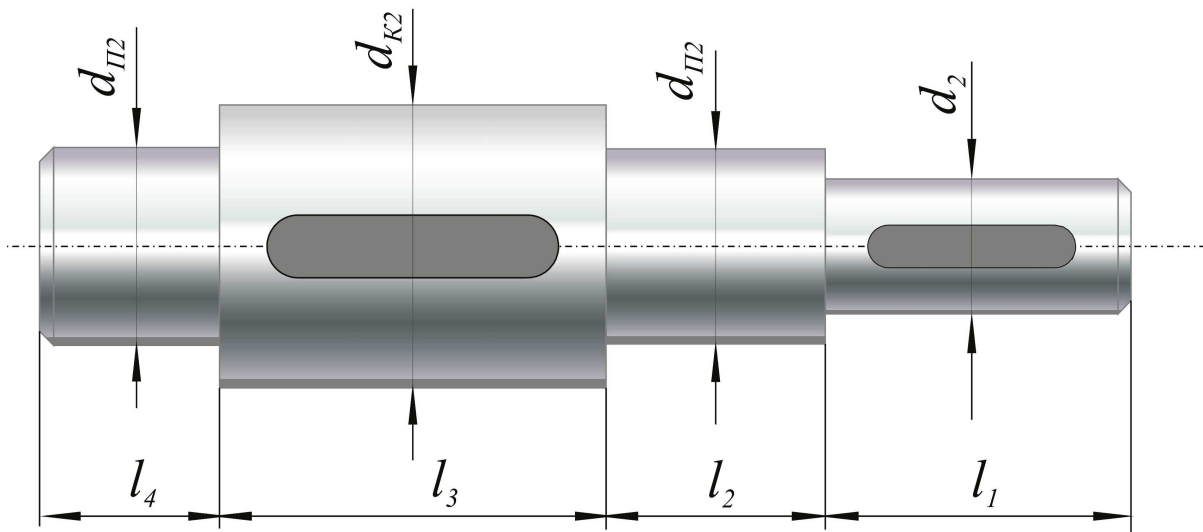


Рис. 4.11. Конструкция ведомого вала

Конструктивно принимаем:

$d_{II2} = 50 \text{ мм}$ – диаметр вала в месте посадки подшипников;

$d_{K2} = 55 \text{ мм}$ – диаметр вала в месте посадки ведомого катка.

Принимаем шарикоподшипники радиальные однорядные средней серии №310 ($d = 50 \text{ мм}$; $D = 110 \text{ мм}$; $B = 27 \text{ мм}$).

$l_1 = 1,8d \cdot 1,8 \cdot 45 = 80 \text{ мм}$;

$l_2 = l_4 = B = 27 \text{ мм}$;

$l_3 = b_1 + 10 \text{ мм} = 100 + 10 = 110 \text{ мм}$.

14. Расчет шпоночных соединений

Принимаем шпонки призматические со скругленным торцами (ГОСТ 23360 -78)

Ведущий вал

$d_1 = 18 \text{ мм}$; шпонка $b \times h = 6 \times 6 \text{ мм}$;

Длина шпонки $l = l_1 - 5 \text{ мм} = 32 - 5 = 27 \text{ мм}$.

$d_{K1} = 30 \text{ мм}$; шпонка $b \times h = 8 \times 7 \text{ мм}$;

Длина шпонки $l = b_1 - 5 \text{ мм} = 100 - 5 = 95 \text{ мм}$.

Материал шпонки – сталь 45 нормализованная $[\sigma_{см}] = 100 \dots 120 \text{ МПа}$.

Из двух шпонок – под муфтой и под катком – более нагружена первая шпонка, которую проверяем на прочность

$$\sigma_{см} = \frac{T_1}{0,25 d_1 \cdot h (l - b)} = \frac{140 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 18 \cdot 6 (27 - 6)} = 215 \frac{H}{мм^2} > [\sigma_{см}].$$

Условие прочности не выполнено, поэтому применим две шпонки, диаметрально расположенные по валу. При этом площадь смятия увеличится в два раза и, соответственно, расчетное напряжение уменьшится в два раза.

Ведомый вал

$d_2 = 45 \text{ мм}$; шпонка $b \times h = 12 \times 8 \text{ мм}$;

Длина шпонки $l = l_1 - 5 \text{ мм} = 80 - 5 = 75 \text{ мм}$;

$d_{K2} = 55 \text{ мм}$; шпонка $b \times h = 16 \times 10 \text{ мм}$;

Длина шпонки $l = b_2 - 5 \text{ мм} = 95 - 5 = 90 \text{ мм}$.

Из двух шпонок ведомого вала – под муфтой и под катком – более нагружена первая шпонка, которую проверяем на прочность

$$\sigma_{см} = \frac{T_2}{0,25 d_2 \cdot h (l - b)} = \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 45 \cdot 8 \cdot (75 - 5)} = 60 \frac{H}{мм^2} < [\sigma_{см}].$$

Условие прочности выполнено.

4.13. ОПОРЫ ВАЛОВ И ОСЕЙ

Опорами валов и осей являются подшипники. В зависимости от рода трения в подшипнике различают подшипники скольжения и подшипники качения. Подшипники скольжения используют в тех случаях, когда применение подшипников качения затруднено или невозможно по ряду причин: высокие вибрационные нагрузки; высокая частота вращения; работа в воде, агрессивных средах и др. Основным элементом подшипника скольжения является вкладыш, который устанавливают в корпусе подшипника (рис. 4.12).

Материал вкладыша должен иметь:

1. достаточную износостойкость;
2. низкий коэффициент трения и высокую теплопроводность.

В качестве материалов для вкладышей применяют: бронзы, баббит, чугун, металлокерамику, неметаллические материалы.

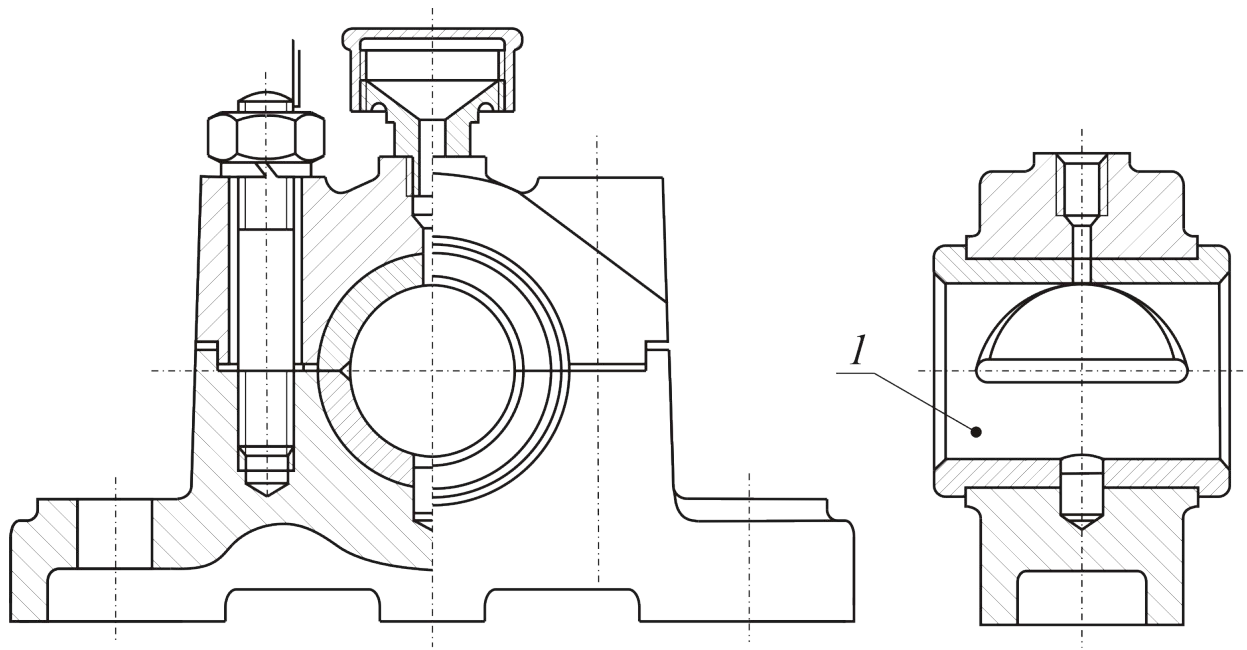


Рис. 4.12. Подшипник с разъемным корпусом и вкладышем (1- вкладыш)

Основным критерием работоспособности опор скольжения является износостойкость – сопротивляемость изнашиванию и заеданию.

Для уменьшения трения и износа подшипники смазывают. Смазка должна быть маслянистой и вязкой. Смазочные материалы могут быть жидкие, консистентные и газообразные. Основным смазочным материалом являются жидкие смазки (органические и минеральные): касторовое масло, индустриальное масло, автотракторные масла и др.

Смазка подается в подшипник самотеком с помощью смазочных устройств или под давлением от насоса.

Наиболее распространенным видом опор валов и вращающихся осей являются подшипники качения. В отличие от подшипников скольжения в них реализуется трение качения.

Подшипники качения имеют ряд преимуществ перед подшипниками скольжения: малые осевые габариты, меньшее сопротивление пуску и вращению, простое техническое обслуживание, низкую себестоимость, взаимозаменяемость. Подшипники качения стандартизированы.

Типовая опора на подшипниках качения показана на рис. 4.13.

Основными критериями работоспособности подшипников качения являются долговечность по усталостному выкрашиванию и статическая грузоподъемность по пластическим деформациям.

Выбор типа подшипника и его размеров зависит от его назначения, направления и величины нагрузки, угловой скорости вращения вала (или оси), режима работы и особенностей монтажа.

Основной характеристикой подшипника качения является динамическая грузоподъемность - $C, кН$.

Условием подбора подшипника является следующее:
 $C(\text{потребная}) \leq C(\text{паспортная})$.

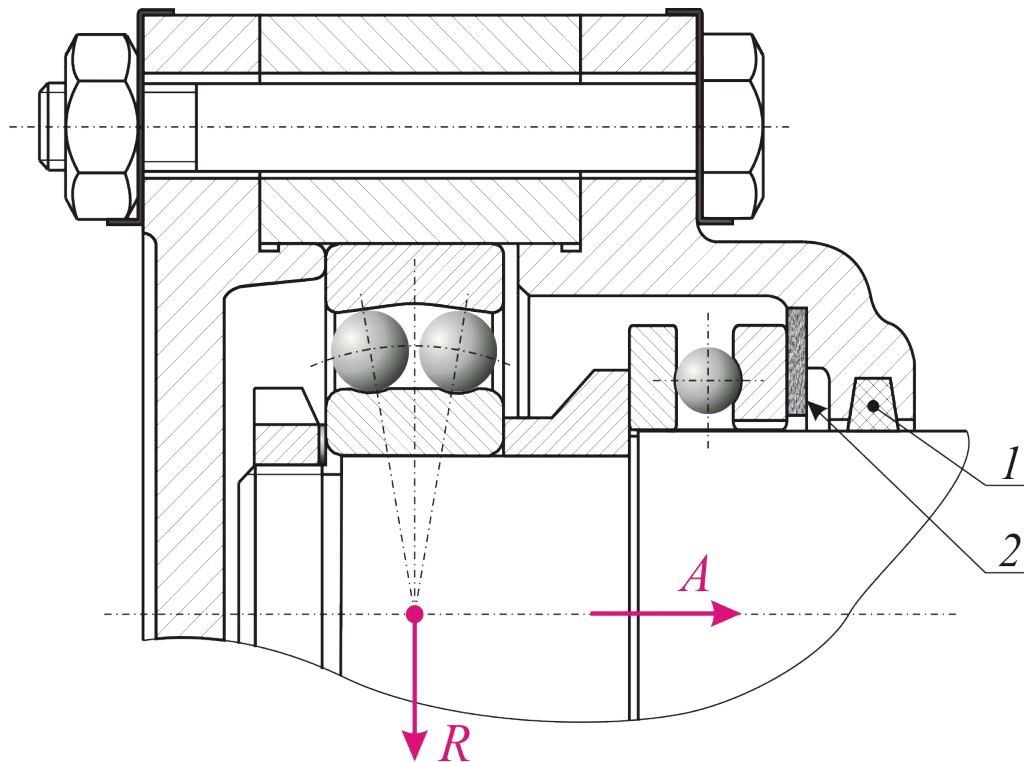


Рис. 4.13. Пример установки вала на шариковых подшипниках:
1-войлочное уплотнение; 2- свинцовое кольцо

C (потребная) определяется следующей зависимостью:

$$C = P \cdot p \sqrt{\frac{60 \cdot n \cdot L_h}{10^6}}, \quad (4.33)$$

где P - эквивалентная нагрузка, $кН$;

n - частота вращения вала (или оси), $об/мин$;

L_h - требуемый ресурс работы подшипника, $час$;

p - показатель степени ($p=3,0$ - для шариковых подшипников, $p=3,3$ для роликовых подшипников.)

Долговечность подшипника качения зависит от от смазки, которая уменьшает трение между телами качения, кольцами и сепаратором, предохраняет их от коррозии и способствует охлаждению подшипника. Для смазки подшипников качения применяют консистентные мази и жидкие минеральные масла.

4.14. МУФТЫ

Муфтами называют устройства, которые служат для соединения концов валов. Потребность в соединении валов связана с тем, что большинство машин компонуют из ряда отдельных частей с входными и выходными валами, которые соединяют с помощью муфт (рис. 4.14).

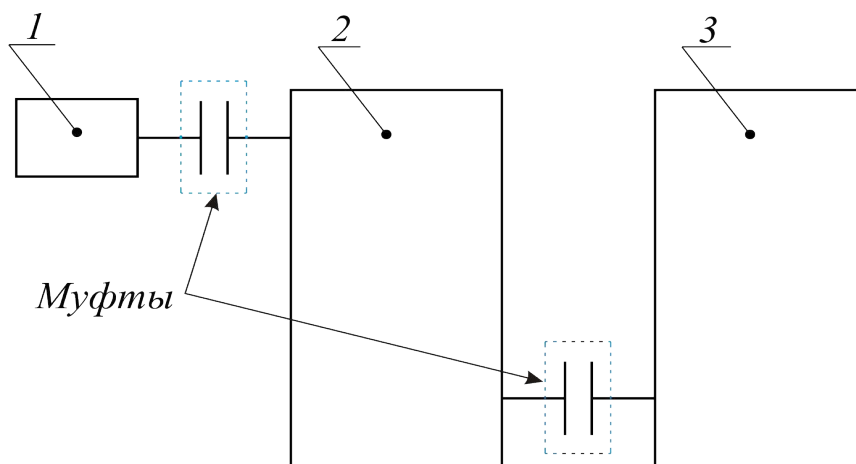


Рис. 4.14. Схема механического привода:
1-двигатель; 2- редуктор; 3-исполнительный механизм

В современном машиностроении применяют большое количество муфт, различающихся по принципу действия и управления, назначению и конструкции.

Классификация муфт по этим признакам представлена на рис. 4.15.

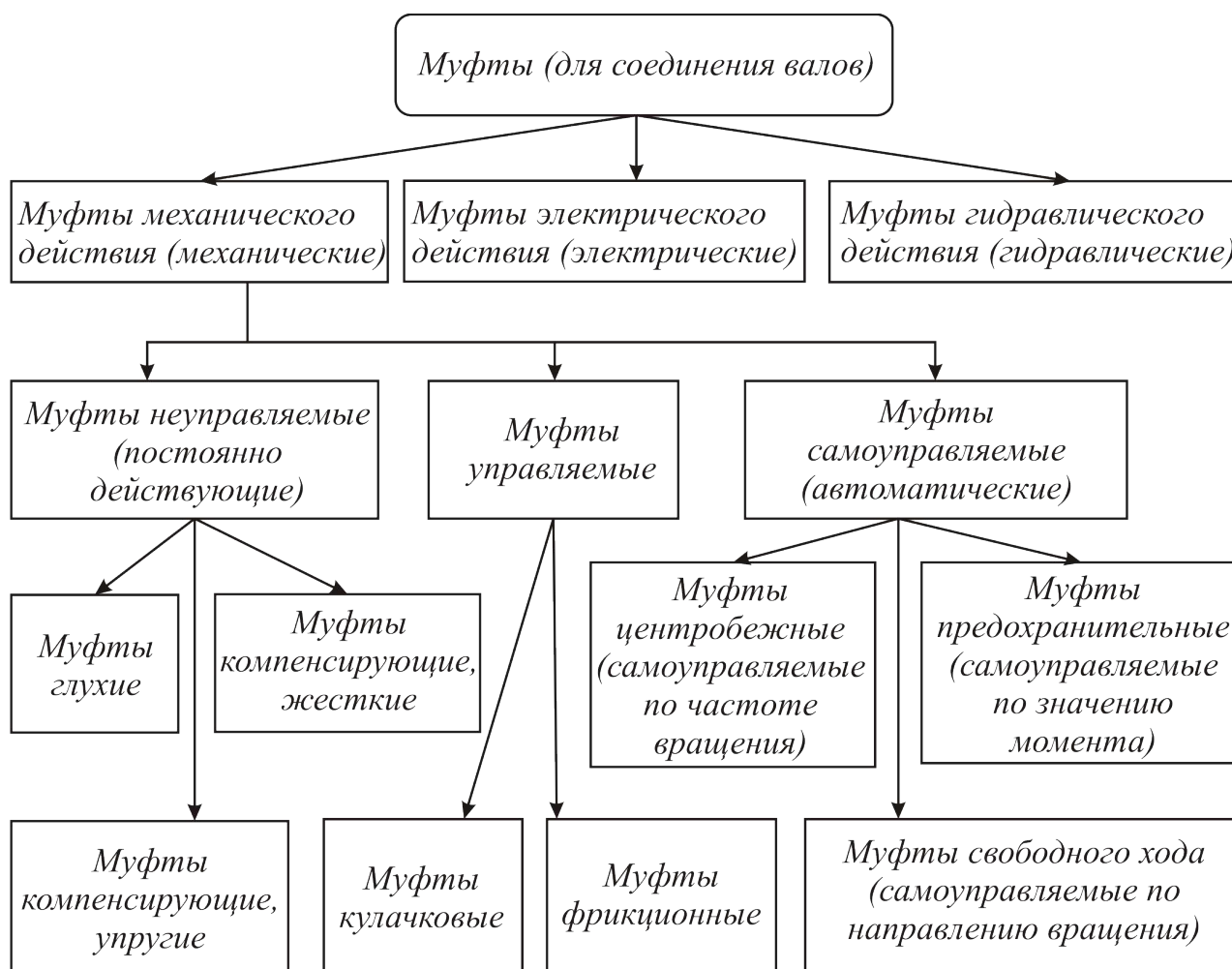


Рис. 4.15. Классификация муфт по принципу действия и управления, назначению и конструкции

Широко применяемые муфты стандартизированы.

Основной паспортной характеристикой муфты является значение передаваемого вращающего момента. Муфты подбирают по ГОСТу по расчетному моменту $M_{расч}$

$$M_{расч} = k \cdot M, \quad (4.34)$$

где k - коэффициент работы муфты ($k = 1,15 \dots 4,0$);

M - передаваемый вращающий момент.

На рис. 4.16 - 4.20 представлены часто применяемые в машиностроении муфты.

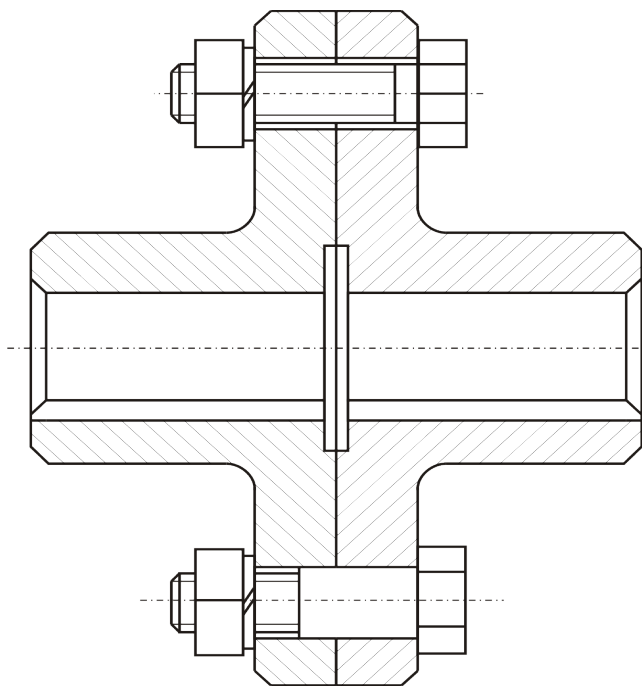


Рис. 4.16. Муфта фланцевая

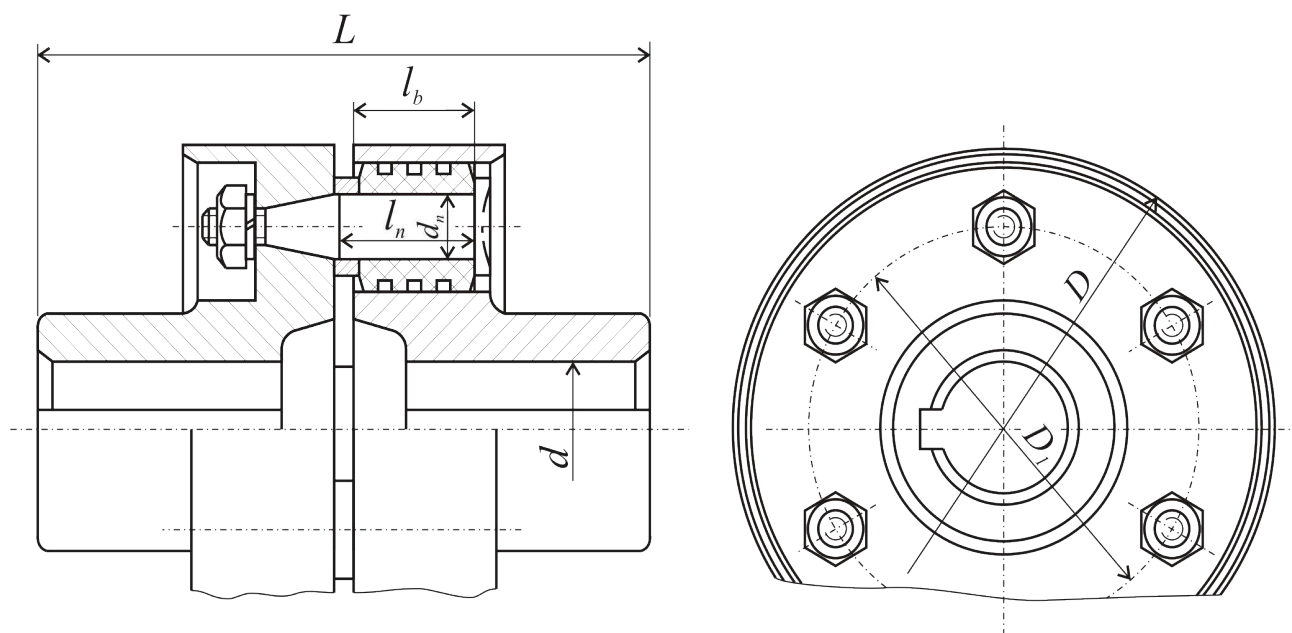


Рис. 4.17. Муфта упругая втулочно-пальцевая (МУВП)

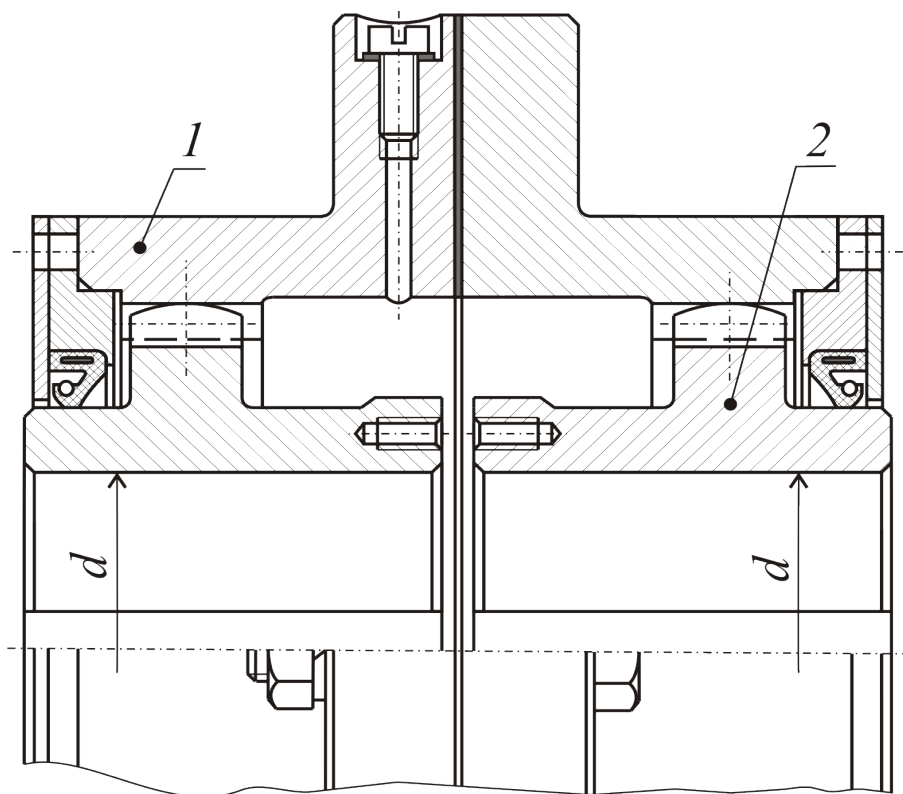


Рис. 4.18. Зубчатая муфта: 1- обойма; 2- втулка

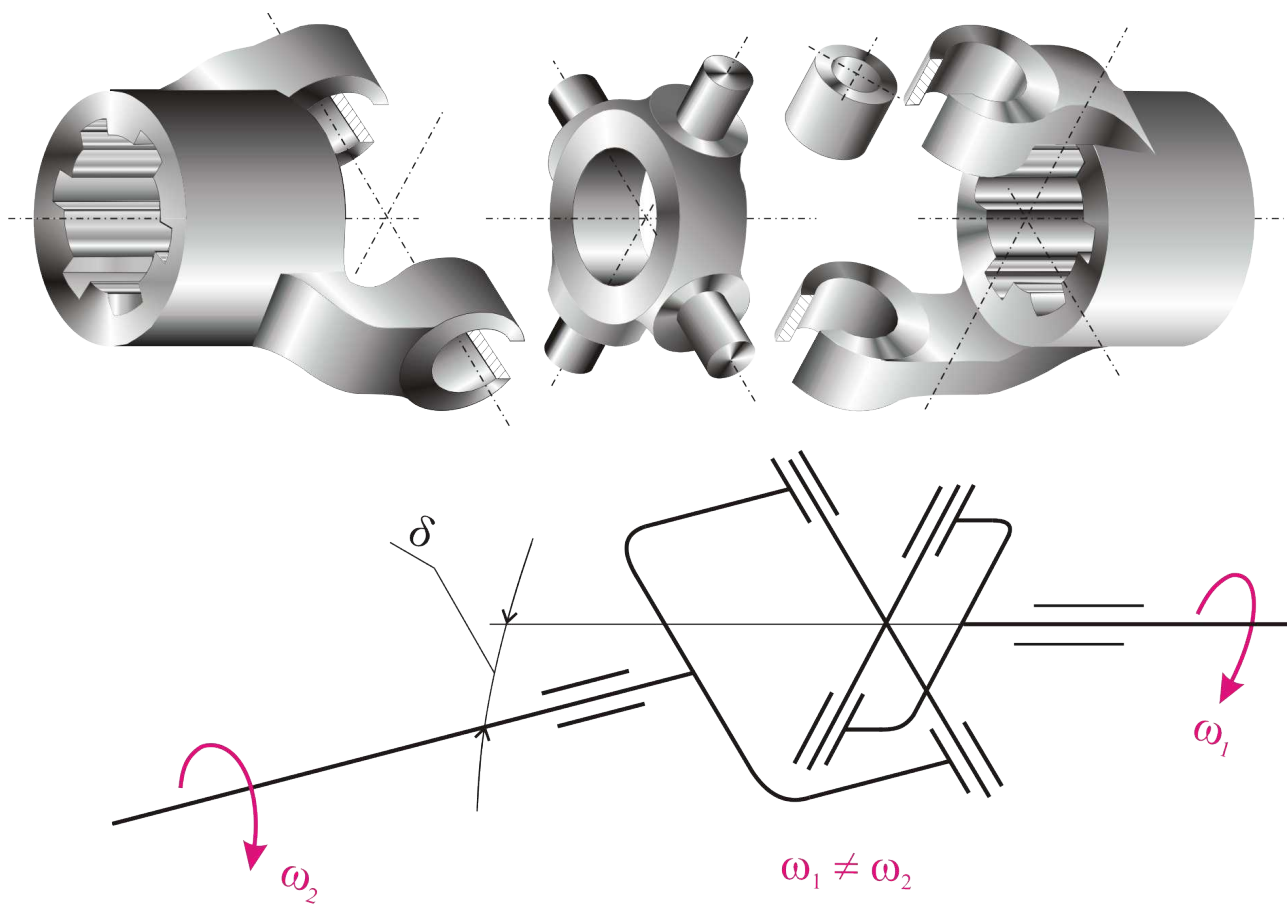


Рис. 4.19. Шарнирная ordinaria муфта

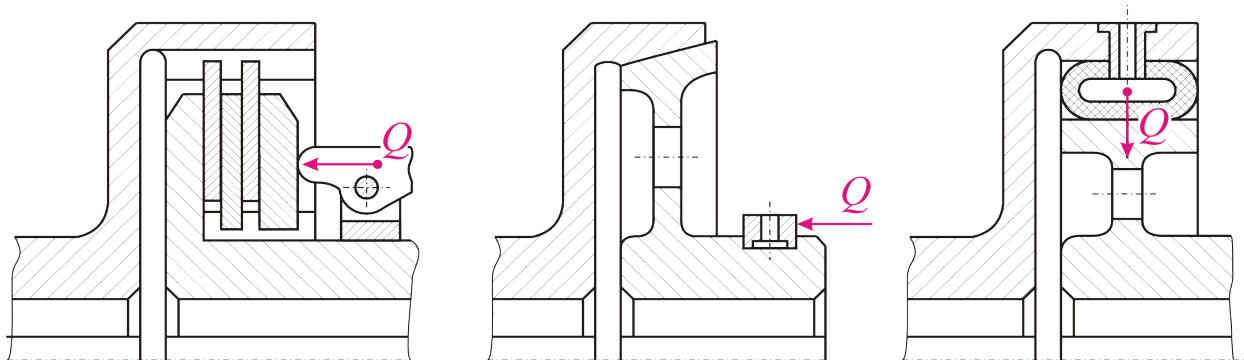


Рис. 4.20. Схемы фрикционных муфт

4.15. УПЛОТНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

Уплотнительные устройства применяют для предохранения от вытекания смазки из корпуса механизма, а также для защиты подшипниковых узлов от попадания извне пыли и влаги.

В машиностроении наиболее распространены следующие виды уплотнений.

Манжетные уплотнения (рис. 4.21).

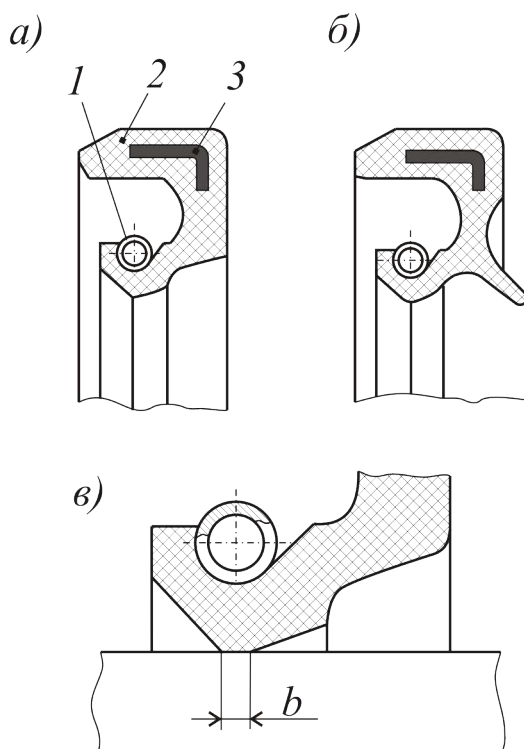


Рис. 4.21. Манжетные уплотнения: 1 - браслетная пружина; 2 - бензомаслостойкая резина; 3 - стальное кольцо

Манжета состоит из корпуса, изготовленного из бензомаслостойкой резины, каркаса, представляющего собой стальное кольцо Г-образного сечения, и браслетной пружины.

Щелевые уплотнения (рис. 4.22).

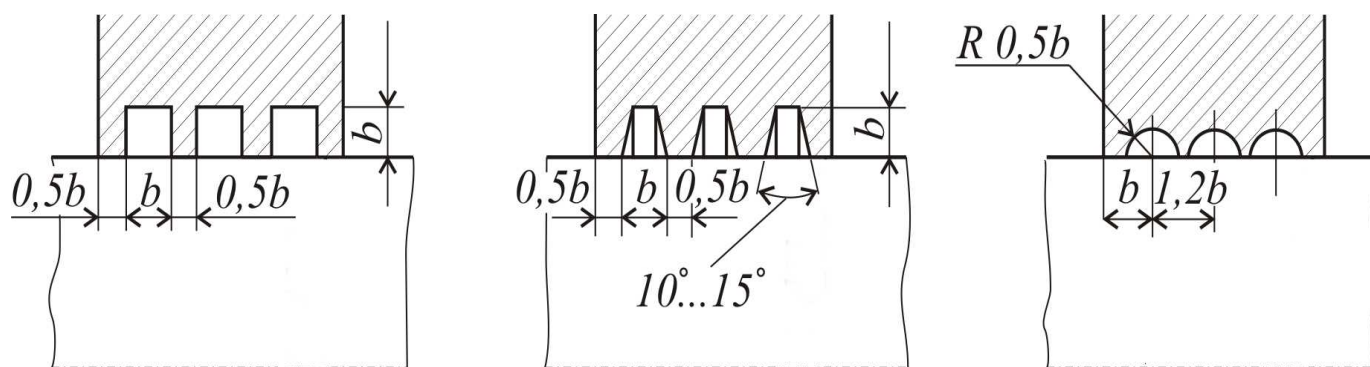


Рис. 4.22. Щелевые уплотнения

В лабиринтных уплотнениях (рис. 4.23) уплотняющий эффект создается чередованием радиальных и осевых зазоров.

Центробежные и комбинированные уплотнения (рис. 4.24).

Эти уплотнения основаны на действии центробежной силы.

Эффективное уплотнение создает винтовая канавка, нарезанная на внешней поверхности специального кольца, по которой смазка направляется внутрь корпуса (направление нарезки винтовой канавки противоположно направлению вращения вала).

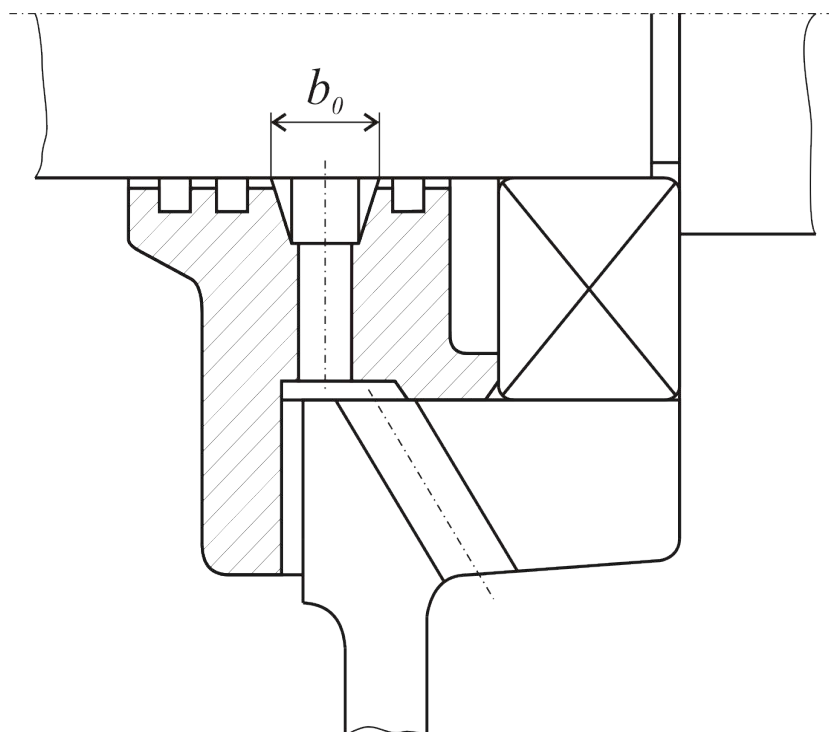


Рис.4.23. Лабиринтные уплотнения

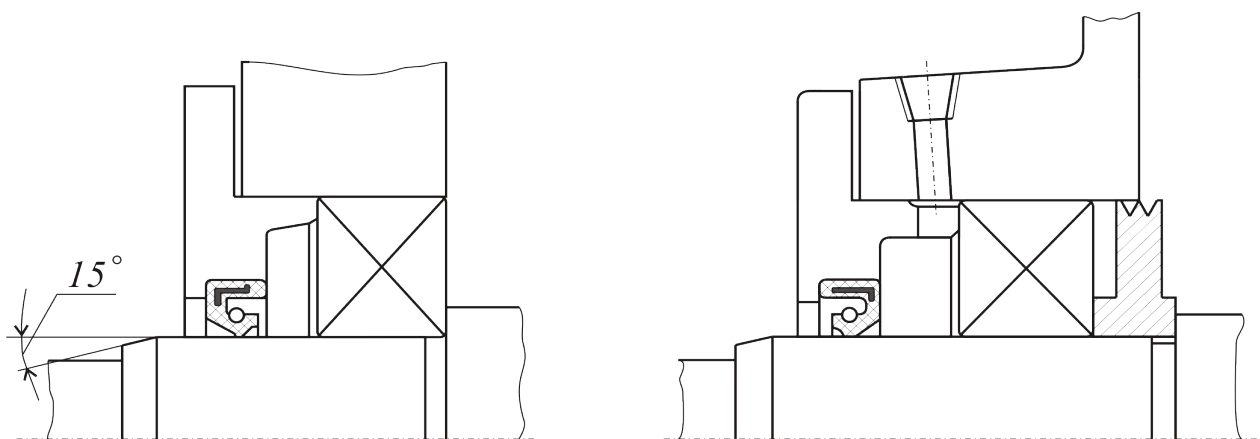


Рис. 4.24. Центробежные и комбинированные уплотнения

4.16. УПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Упругие элементы – пружины и рессоры – широко распространены в машиностроении. Их применяют:

1. Для создания заданных постоянных сил (например, в кулачковых механизмах).
2. Для силового замыкания механизмов (например, в кулачковых механизмах).
3. Для выполнения функций двигателя (например, часовые пружины).
4. Для виброизоляции в транспортных машинах (например, рессорная подвеска кузова автомобиля).
5. Для восприятия энергии удара (например, буферные пружины, применяемые в подвижном железнодорожном составе).
6. Для измерения сил (например, в измерительных приборах).

Основные типы пружин приведены на рис. 4.25.


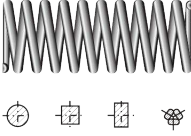
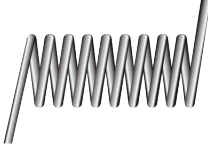
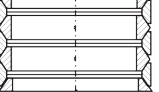
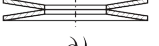
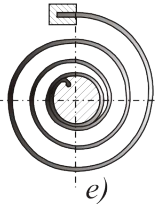
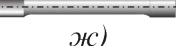
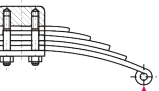
<i>Основные типы пружины</i>				
<i>пружины</i>	<i>растяжения</i>	<i>сжатия</i>	<i>кручения</i>	<i>изгиба</i>
<i>витые</i>	 <i>a)</i>	 <i>б)</i>	 <i>в)</i>	—
<i>прочие</i>	—	 <i>г)</i>  <i>д)</i>	 <i>е)</i>  <i>ж)</i>	 <i>з)</i>

Рис. 4.25. Основные типы пружин

Работа упругих элементов в машинах заключается в накоплении энергии и её последующей отдаче или в осуществлении требуемого постоянного нажатия.

Основное распространение в машиностроении имеют упругие элементы растяжения или сжатия.

Материалы для пружин должны иметь высокие и стабильные во времени упругие свойства. Основными материалами для пружин являются: высокоуглеродистые стали 65, 70, марганцовистые стали 65Г, кремнистые стали 60С2А, хромванадиевая сталь 50ХФА и др.

Цилиндрические пружины характеризуются следующими основными геометрическими параметрами (рис.4.26):

- 1) диаметром проволоки d ;
- 2) средним диаметром пружины D ;
- 3) шагом витков h ;
- 4) углом подъёма витков α ;
- 5) длиной рабочей части пружины H_p ;
- 6) длиной H ;
- 7) числом рабочих витков s .

Упругие элементы относят к деталям машин, требующим достаточно точных расчётов. При работе витки цилиндрических пружин подвергаются напряжению кручения. Упругие элементы рессор работают на изгиб. Кроме этого упругие элементы рассчитываются на жёсткость.

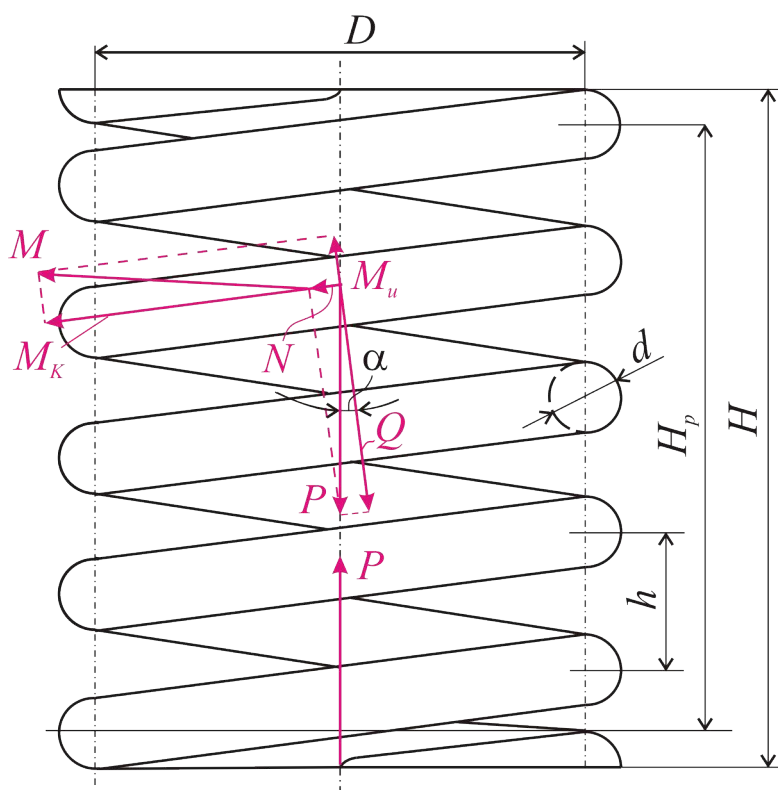


Рис. 4.26. Параметры цилиндрической пружины и силы, действующие на упругий элемент

4.17. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ременная передача состоит из ведущего и ведомого шкивов и ремня, надетого на шкивы с предварительным натяжением F_0 . Энергия передается за счет трения, возникающего между ремнем и шкивами (рис. 4.27).

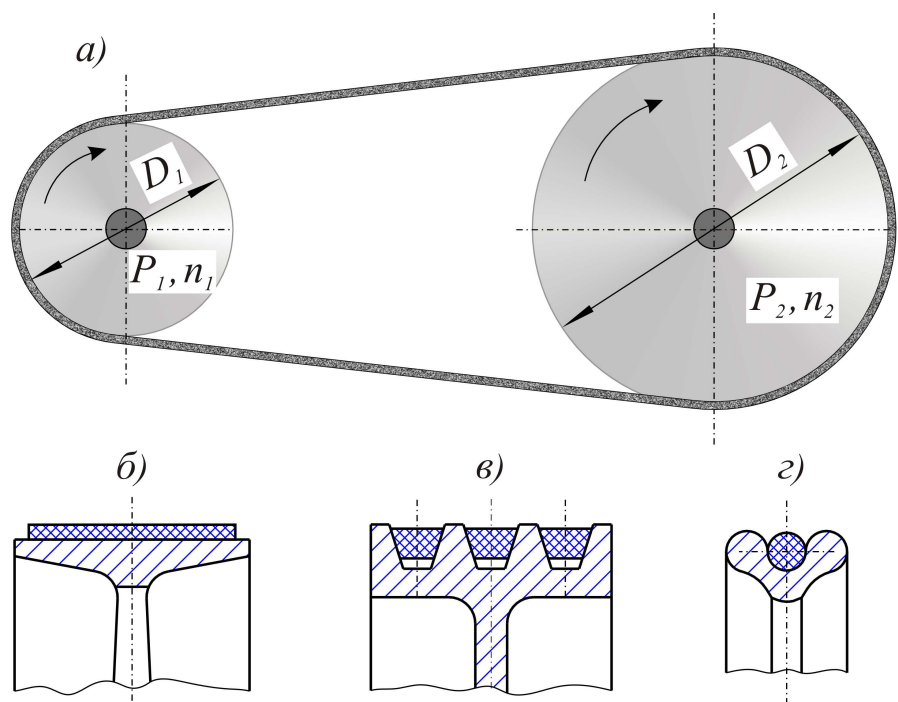


Рис. 4.27. Ременная передача: а) общий вид; б) плоскоремённая; в) клиноремённая; з) круглоремённая

Ремни выполняют с сечением в виде узкого прямоугольника - плоские ремни; трапециевидного сечения - клиновые ремни и поликлиновые ремни; круглого сечения - круглые ремни и зубчатые ремни. Наиболее широкое распространение в машинах имеют клиновые и плоские ремни.

Достоинствами ременных передач являются:

1. возможность передачи движения на значительные расстояния;
2. плавность и бесшумность работы;
3. возможность работы с высокими частотами вращения;
4. малая стоимость.

Недостатки ременных передач:

1. значительные габариты;
2. упругое скольжение ремня при работе;
3. повышенные силы на валы и опоры;
4. необходимость применения натяжных устройств.

Натяжение ремня обеспечивают одним из следующих способов:

1. перемещением одного из шкивов (рис. 4.28);
2. натяжным роликом;
3. автоматическим устройством, обеспечивающим регулирование натяжения в зависимости от нагрузки.

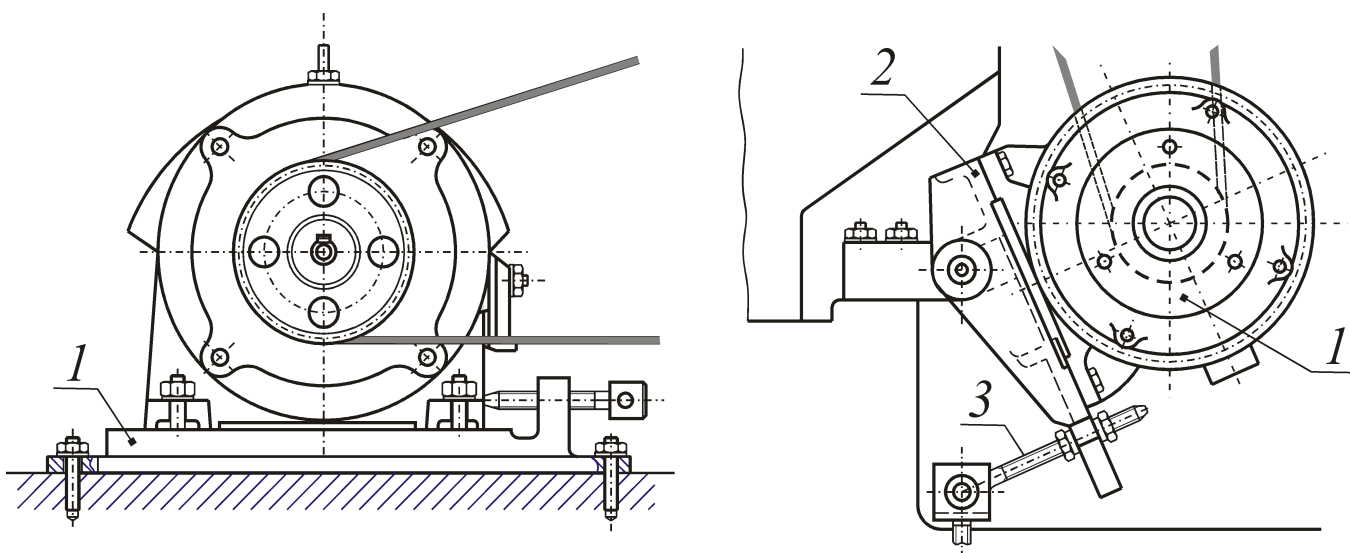


Рис. 4.28. Элементы конструкции для натяжения ремней

4.18. МАТЕРИАЛЫ РЕМНЕЙ

К материалам ремней предъявляются следующие требования:

1. прочность и износостойкость;
2. достаточный коэффициент трения со шкивами;
3. невысокая изгибная жесткость.

Для плоских ремней применяются синтетические тканевые материалы, прорезиненные кордшнуровые с лавсановым шнуром, резиноканевые, кожаные и хлопчатобумажные.

Клиновой ремень состоит из следующих частей:

1. корда, представляющего собой основной несущий слой, расположенный примерно по центру тяжести сечения ремня;
2. резиновых слоев, расположенных над и под несущим слоем (кордом);
3. обертки ремня в виде нескольких слоев прорезиненной ткани, намотанной диагонально.

Корд выполняют из химических волокон: вискозы, капрона, лавсана. Применяются кордтканевые и кордшнуровые ремни.

4.19. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Зубчатые передачи представляют собой трехзвенный механизм, в котором два подвижных звена являются зубчатыми колёсами, образующими с неподвижным звеном вращательную пару.

Зубчатая передача служит для передачи вращательного движения. Зубчатые передачи - наиболее распространённый тип передач в современном машиностроении и приборостроении; их применяют в широком диапазоне скоростей, мощностей и передаточных чисел.

Основные достоинства зубчатых передач по сравнению с другими видами передач:

1. постоянство передаточного числа;

2. высокая нагрузочная способность;
3. высокий КПД (0,97...0,99);
4. малые габаритные размеры по сравнению с другими видами передач при равных мощностях;
5. большая долговечность и надёжность в работе;
6. простота обслуживания.

К недостаткам зубчатых передач следует отнести:

1. высокие требования к точности изготовления и монтажа;
2. шум при больших скоростях;
3. громоздкость при больших расстояниях между осями колёс;
4. потребность в специальном оборудовании и инструменте для нарезания колёс.

По взаимному расположению осей колёс простейшими являются цилиндрические колёса с параллельными осями; по расположению зубьев на колесе различают *прямозубые* и *косозубые* колёса.

Наиболее распространённой формой профиля зуба являются *эвольвентные* зубья (рис. 4.29).

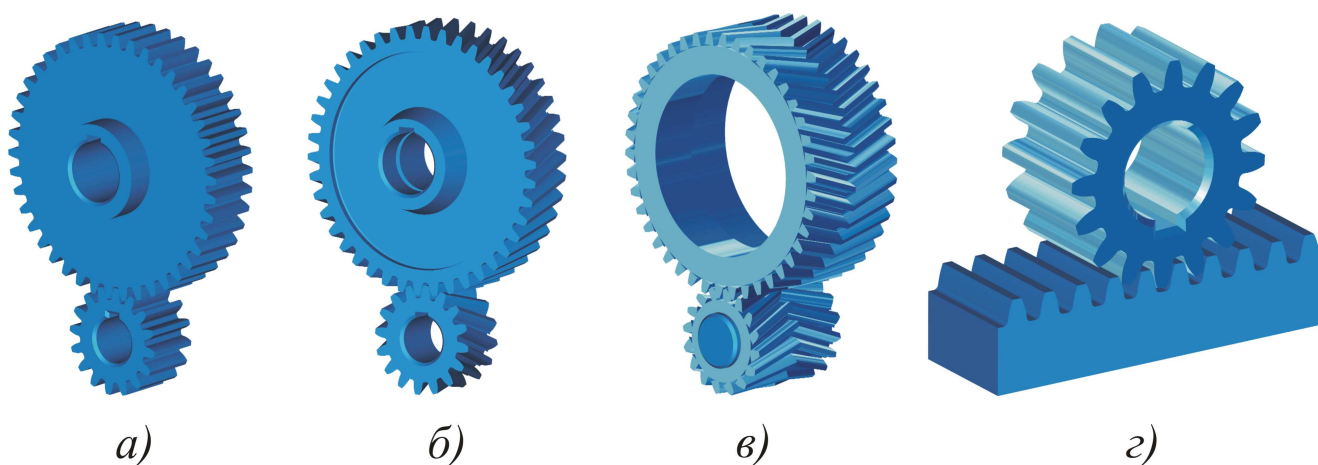


Рис. 4.29. Разновидности колёс с эвольвентным зубом:
а, г) прямозубые; б) косозубые; в) шевронные

4.20. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Зубчатое зацепление характеризуется следующими основными параметрами:

d_a - диаметр вершин зубьев;

d_f - диаметр впадин зубьев;

d - делительный диаметр;

p_t - окружной шаг;

p_n - нормальный шаг (для прямозубых колёс $p_t = p_n$);

h - высота зуба;

h_a - высота головки зуба;

Поломка зубьев наблюдается у основания зуба вследствие периодического действия переменных изгибных напряжений, рис. 4.31, а.

Выкрашивание рабочих поверхностей зубьев наблюдается в закрытых передачах, работающих при обильной смазке. Выкрашивание возникает на ножках зубьев вблизи полюсной линии, см. рис. 4.31, б.

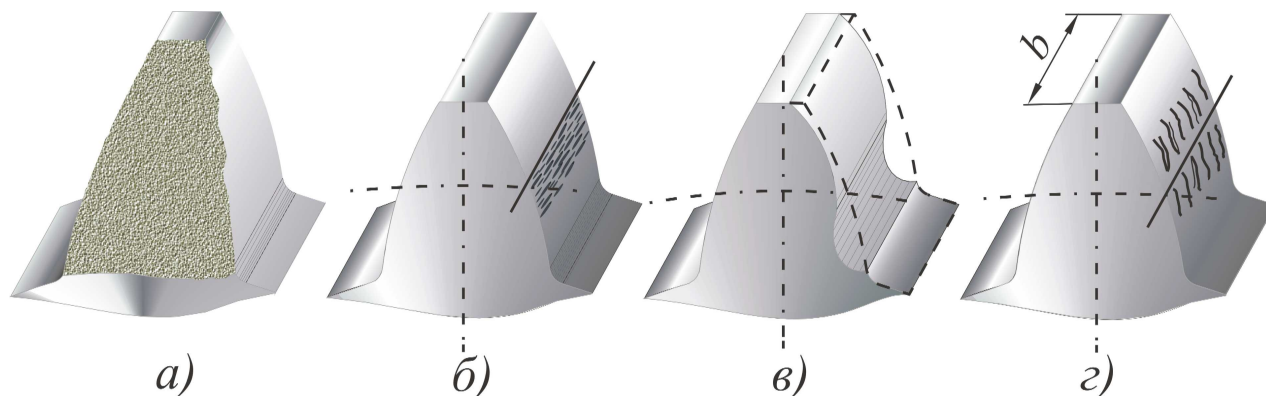


Рис. 4.31. Виды разрушения зубьев

Износ зубьев чаще всего наблюдается в открытых передачах, в которых не предусмотрен закрытый корпус.

Износ зубьев заключается в истирании рабочих поверхностей вследствие попадания в зону зацепления металлических частиц, пыли, грязи (абразивный износ), см. рис. 4.31, в.

Заедание наблюдается в тихоходных, тяжело нагруженных передачах. Этот вид повреждения заключается в том, что под действием высоких давлений в зоне нарушенной масляной плёнки сопряжённые поверхности зубьев сцепляются одна с другой.

Частицы поверхности одного зуба отрываются и прихватываются к поверхности зуба парного колеса; при последующем относительном движении зубьев эти частицы отрываются и делают на поверхности борозды, задиры, см. рис. 4.31, г.

Для исключения повреждения зубьев, в первую очередь, выкрашивания и поломки расчётным путём проверяют выносливость рабочих поверхностей зубьев (контактная и изгибная прочность зубьев).

4.22. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ПРЯМОЗУБОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

На рис. 4.32 показана схема зацепления двух эвольвентных зубьев в полюсе и силы, действующие со стороны зуба ведущего колеса (шестерни) на зуб ведомого колеса: F_n - нормальная сила; F_t - окружная сила; F_r - радиальная сила.

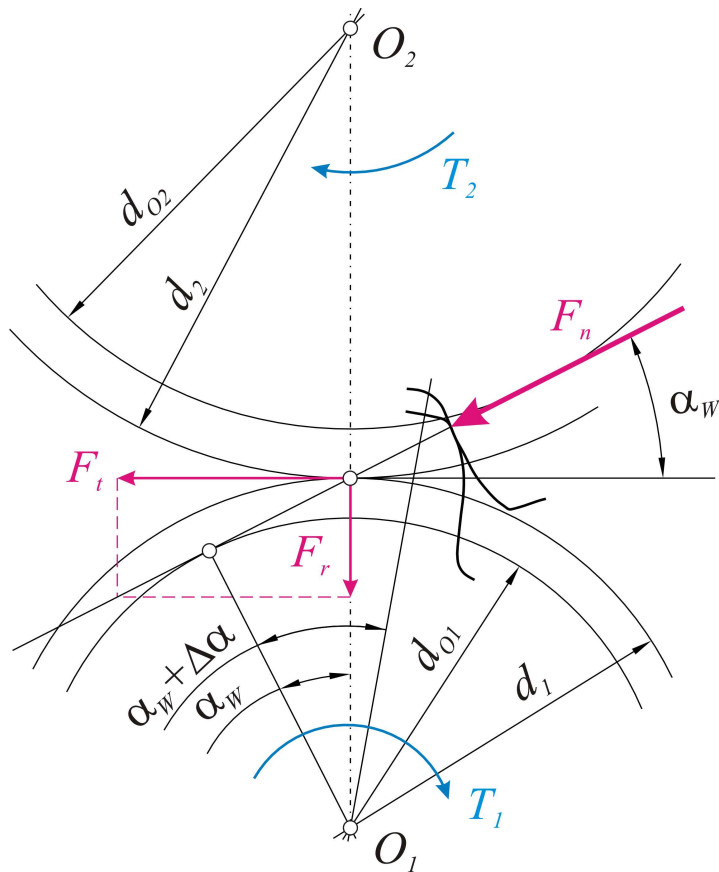


Рис. 4.32. Схема зацепления эвольвентных колёс

Их можно определить по формулам:

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}; \quad (4.36)$$

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w; \quad (4.37)$$

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha_w} = \frac{2T_2}{d_2 \cdot \cos \alpha_w}. \quad (4.38)$$

4.23. РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Условие контактной прочности зубьев имеет следующий вид:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q \cdot E}{2\pi(1-\mu^2)\rho}} \leq [\sigma_H], \quad (4.39)$$

где σ_H - расчётное контактное напряжение, $H/мм^2$;

q - удельная контактная нагрузка, $H/мм$;

E - модуль упругости материала зубьев, $H/мм^2$ (для стальных колёс

$E = 2,15 \cdot 10^5 H/мм^2$);

μ - коэффициент Пуассона (для стали $\mu=0,3$);
 ρ - приведённый радиус кривизны зубьев, мм; определяемый по формуле:

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (4.40)$$

$[\sigma_H]$ - допускаемое контактное напряжение (для стальных колёс при $HB \leq 350$ $[\sigma_H] \approx 2 HB + 70$, Н/мм²).

Удельная контактная нагрузка определяется следующим образом:

$$q = \frac{F_n \cdot K_H}{b \cdot K_\varepsilon} = \frac{2 T_2 \cdot K_H}{d_2 \cdot b \cdot K_\varepsilon \cdot \cos \alpha_w}, \quad (4.41)$$

где K_H - коэффициент нагрузки;

K_ε - коэффициент степени перекрытия зубьев.

Коэффициенты K_H и K_ε принимаются по справочнику.

На основании условия контактной прочности (4.39) можно получить формулу проектного расчёта закрытых цилиндрических прямозубых стальных передач

$$a_w = (u + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H] \cdot u} \right)^2 \cdot \frac{T_2 \cdot K_H}{\Psi_{ba}}}, \quad (4.42)$$

где Ψ_{ba} - коэффициент ширины колёс (для прямозубых колёс

$\Psi_{ba} = \frac{b}{a_w}$; $\Psi_{ba} = 0,125 \dots 0,25$). Определив межосевое расстояние, находят модуль зацепления по ГОСТ 9563-80:

$$m_n = (0,01 \dots 0,02) a_w \quad (4.43)$$

и числа зубьев колёс z_1, z_2 .

Затем определяют геометрические размеры передачи, необходимые для нарезания зубьев и изготовления зубчатых колёс.

4.24. РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ НА ИЗГИБНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Зуб рассматривают как консольную балку, нагруженную сосредоточенной силой F_n , приложенную к зубу в его вершине под углом α (см. схему на рис. 4.33).

Эта сила, действующая под углом α к оси зуба, вызывает в его сечениях напряжения изгиба и сжатия. Силу F_n переносят по линии зацепления до оси зуба и полученную точку O принимают за вершину параболы, которая определяет контур балки равного сопротивления изгибу.

Точки A и B касания ветвей параболы и профиля зуба определяют положение опасного сечения зуба.

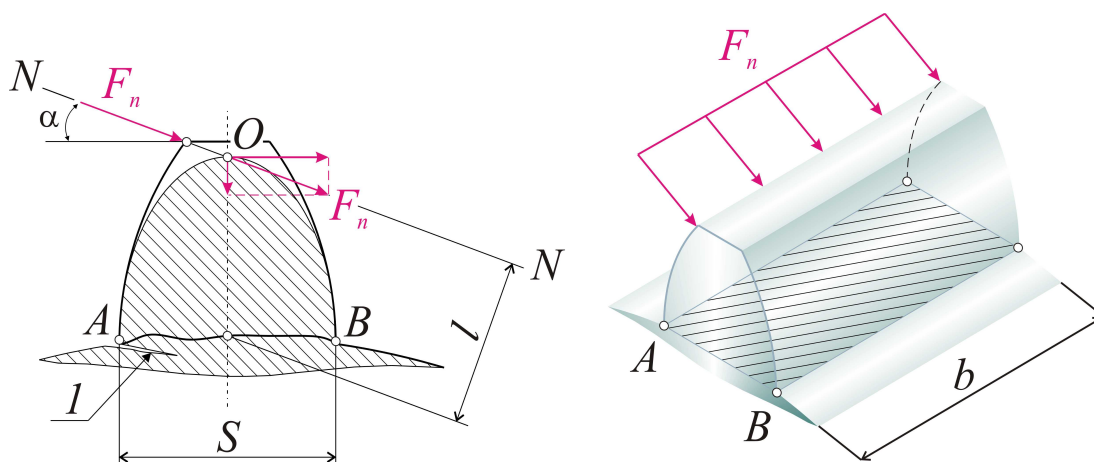


Рис. 4.33. Схема расчёта на изгиб (I – усталостная трещина)

Условие изгибной прочности зубьев имеет следующий вид:

$$\sigma_F = \frac{F_t \cdot K_F \cdot Y_F}{b \cdot m_n} \leq [\sigma_F], \quad (4.44)$$

где σ_F – расчётное напряжение в опасном сечении зуба, H/mm^2 ;

K_F – коэффициент нагрузки (принимается по справочникам);

Y_F – коэффициент формы зуба ($Y_F = f(z)$);

$[\sigma_F]$ – допускаемое изгибное напряжение, определяемое по формуле:

$$[\sigma_F] \approx (1,4 \dots 1,6) \sigma_{-1}, \quad (4.45)$$

где σ_{-1} – предел выносливости материала зубчатого колеса, H/mm^2 .

Расчёт валов при зубчатых передачах производится аналогично расчёту фрикционных валов.

4.25. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Резьбовыми называют такие соединения, которые осуществляются крепежными деталями посредством резьбы. Резьба получается образованием на цилиндрическом или коническом стержне канавок с поперечным сечением определённого профиля (в виде треугольника, трапеции и т.д.).

Резьбовые соединения являются наиболее распространёнными разъёмными соединениями. Они надёжны и удобны по форме для сборки и разборки, имеют небольшие габариты, просты в изготовлении.

Недостаток резьбовых соединений состоит в наличии концентраторов напряжений в резьбовых деталях, понижающих их прочность.

Основными крепежными деталями резьбовых соединений являются болты, винты, шпильки и гайки (рис. 4.34).

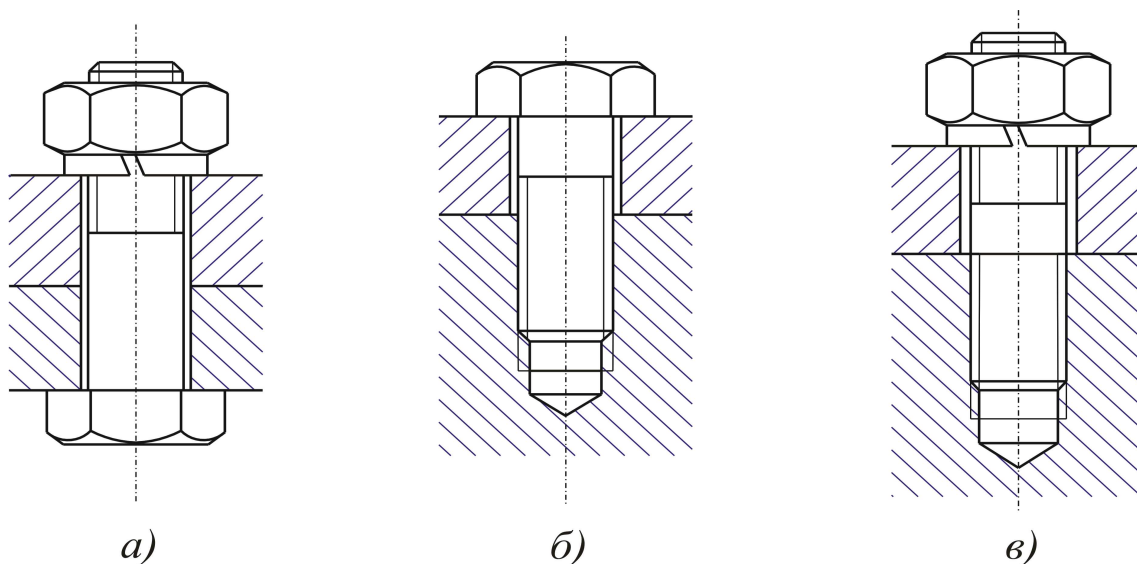


Рис. 4.34. Крепёжные детали в соединениях: а) болтовом; б) винтовом; в) при помощи шпильки

4.26. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РЕЗЬБ

В зависимости от формы поверхности, на которой образуется резьба, различают *цилиндрические* и *конические* резьбы (рис. 4.35).

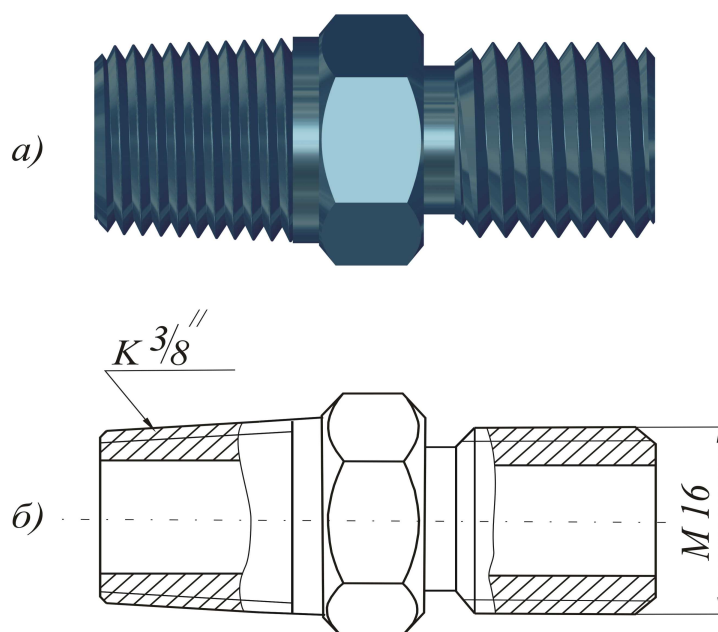


Рис. 4.35. Деталь с конической и цилиндрической резьбой: а) в натуральном виде; б) на эскизе

В зависимости от формы профиля резьбы делятся на пять основных типов: *треугольные*, *упорные*, *трапецидальные*, *прямоугольные* и *круглые* (рис.4.36).

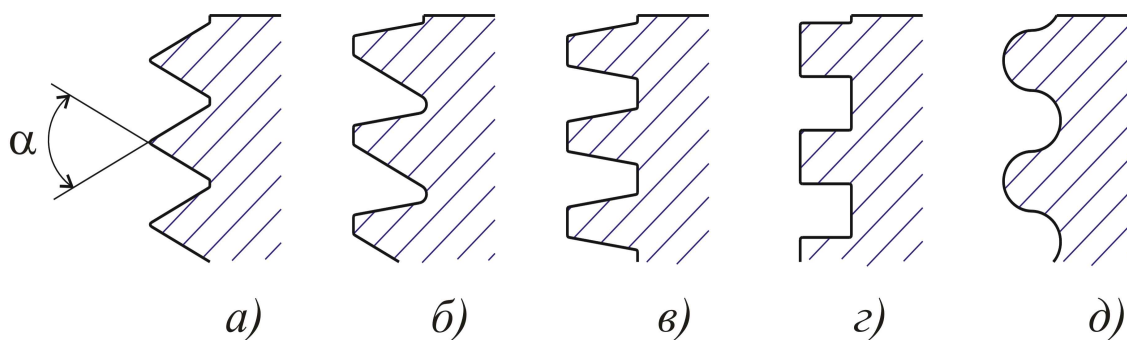


Рис. 4.36. Профили резьб: а) треугольный; б) упорный; в) трапецеидальный; з) прямоугольный; д) круглый

В зависимости от направления винтовой линии различают *правые* и *левые* резьбы. В зависимости от числа заходов резьбы делятся на *однозаходные* и *многозаходные*. В зависимости от назначения резьбы делятся на *крепежные* и для передачи движения (*ходовые*).

Основными типами резьб являются:

- 1) метрическая резьба с профилем в виде равностороннего треугольника с углом профиля $\alpha=60^\circ$;
- 2) дюймовая резьба, профилем в виде равнобедренного треугольника и углом профиля $\alpha=55^\circ$;
- 3) трапецеидальная резьба, с профилем в виде равнобочной трапеции и углом профиля $\alpha=30^\circ$;
- 4) прямоугольная резьба, с профилем в виде квадрата и углом профиля $\alpha=0^\circ$;
- 5) трубная резьба, являющаяся мелкой дюймовой резьбой, но с закруглёнными выступами и впадинами.

Отсутствие радиальных зазоров в трубной резьбе делает такое резьбовое соединение герметичным.

Резьбы, получившие широкое распространение, стандартизированы. Размеры стандартной резьбы (рис. 4.37) принимают по соответствующему ГОСТу, в зависимости от наружного диаметра d резьбы.

Параметры, определяющие форму и профиль резьбы (см. рис. 4.37):

- 1) высота теоретического профиля H ;
- 2) рабочая высота профиля h ;
- 3) угол профиля α ;
- 4) наружный диаметр резьбы $d(D)$;
- 5) внутренний диаметр резьбы $d_1(D_1)$;
- 6) средний диаметр резьбы $d_2(D_2)$;
- 7) угол подъёма резьбы ψ ;
- 8) шаг резьбы p ;
- 9) ход резьбы S .

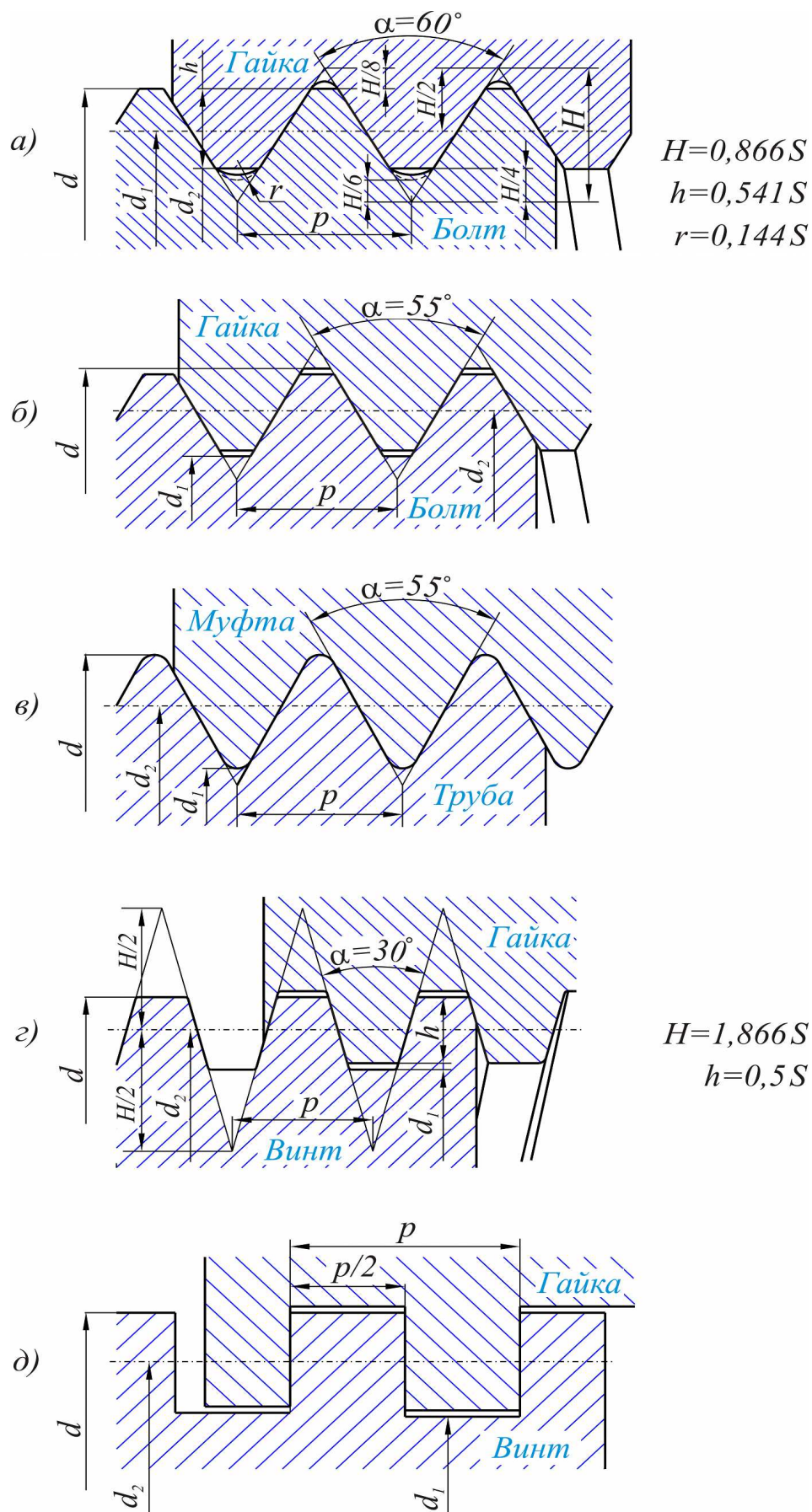


Рис. 4.37. Виды резьб: а) метрическая; б) дюймовая; в) трубная; г) трапецеидальная; д) прямоугольная

4.27. РАСЧЁТ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ

Основным критерием работоспособности и расчёта крепёжных резьбовых деталей является прочность.

Опыт показывает, что разрушение резьбовых соединений происходит, как правило, из-за среза витков резьбы, а также из-за разрушения болтов и шпилек по резьбовой части.

Из расчёта резьбового стержня на прочность определяют номинальный диаметр резьбы. Остальные размеры болта, а также гайки и шайбы принимают в зависимости от диаметра резьбы по соответствующим ГОСТам.

Основные случаи расчёта резьбовых соединений:

- 1) болт нагружен осевой силой;
- 2) резьбовый стержень нагружен осевой растягивающей (или сжимающей) силой Q и крутящим моментом M_K ;
- 3) резьбовое соединение нагружено поперечной силой R ;
- 4) резьбовое соединение предварительно затянуто при сборке и нагружено внешней растягивающей силой;
- 5) резьбовое соединение предварительно затянуто при сборке и нагружено внецентренной растягивающей силой F .

В групповом соединении определяют нагрузку на максимально нагруженный болт, рассчитывают последний как одиночный и все болты в соединении берут одинаковыми.

Рассмотрим первый случай нагружения.

На рис. 4.38 изображено болтовое соединение грузовой скобы. Расчёт сводится к определению внутреннего диаметра резьбы d_1 из условия прочности на растяжение

$$\sigma_p = \frac{4F}{\pi \cdot d_1^2} \leq [\sigma_p], \quad (4.46)$$

откуда

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot [\sigma_p]}}, \quad (4.47)$$

где $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение на растяжение для материала болта.

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[S]}, \quad (4.48)$$

здесь σ_T - предел текучести материала болта;

$[S]$ - допускаемый коэффициент запаса прочности, принимаемый по таблицам.

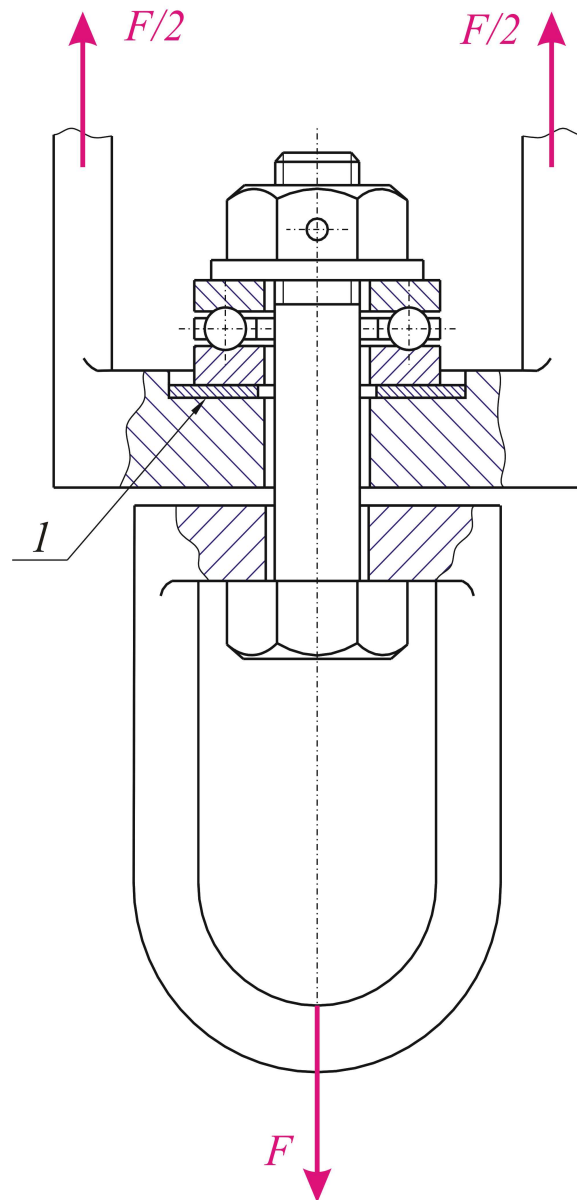


Рис. 4.38. Болтовое соединение грузовой скобы

Для болтов из углеродистой стали принимают $[S]=1,5...3,0$.

Рассмотрим второй случай загрузки. Примером этого случая нагружения является резьбовое соединение винтовой стяжки (рис. 4.39).

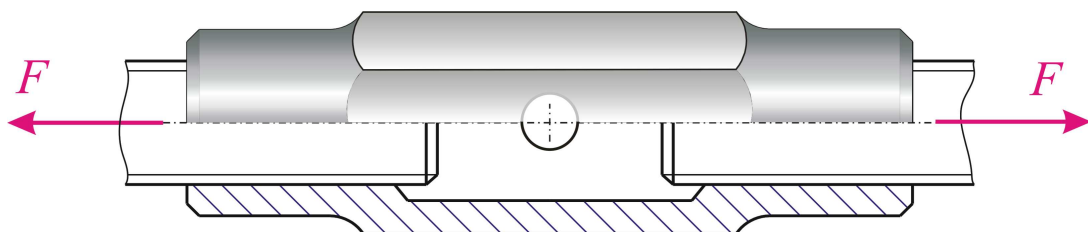


Рис. 4.39. Винтовая стяжка

В период подтягивания под нагрузкой стержень испытывает растяжение и кручение, поэтому расчёт стержня на совместное действие растяжения и

кручения можно заменить расчётом на растяжение, принимая для расчёта увеличенную нагрузку (с учётом кручения) $F_{расч} = 1,3 F$.

Внутренний диаметр резьбы стержня определяется из условия прочности

$$\sigma_{экв} = \frac{4 F_{расч}}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p], \quad (4.49)$$

откуда

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 F_{расч}}{\pi \cdot [\sigma_p]}}. \quad (4.50)$$

Расчёты резьбовых соединений применительно к другим случаям нагружения приведены, в частности, в учебниках для вузов [26, 27, 28].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После усвоения материала, изложенного в пособии, студент может под руководством преподавателя приступить к выполнению реального курсового проекта, связанного с проектированием и конструированием конкретного механизма или машины.

Процесс проектирования разных механизмов и машин осуществляется с учётом того, что состав и последовательность этапов проектирования не зависят от целевого назначения проектируемого механизма или машины в целом. Кроме того учитывается то, что логика процесса проектирования может быть в одинаковой степени применима и к традиционному ручному способу проектирования, и к автоматическому посредством системы автоматизированного проектирования (САПР). Основные этапы (стадии) проектирования регламентированы ЕСКД и осуществляются, как правило, высококвалифицированными специалистами.

Первым этапом проектирования является *техническое задание*, которое устанавливает новые качества, назначение проектируемого механизма или машины, обосновывает целесообразность создания и регламентирует все основные технические характеристики. Техническое задание является итогом предпроектной подготовки. В ходе работы над техническим заданием производится сбор и обработка *исходных данных для проектирования*, как правило, при помощи ЭВМ. Аналогичным образом производится оценка *основных показателей*, в определенной степени влияющих на сбыт, таких как *цена и характеристики работоспособности*. Техническое задание обосновывает техническую и экономическую целесообразность проектирования новых машин и механизмов.

Техническая целесообразность обусловлена появлением новых материалов или новых технологий (технических решений).

Экономическая целесообразность определяется существенным повышением производительности, экономией энергоресурсов, увеличением универсальности проектируемого изделия по сравнению с текущими аналогами. В любом случае, техническое задание должно содержать тщательное экономическое обоснование предполагаемой эффективности проектируемого объекта. Проектируемый механизм или машина должны иметь более высокие технико-экономические показатели по сравнению с существующими.

Концепция проектирования, реализуемая на этапе технического задания, разрабатывается после того, как сформулированы исходные данные и определены приоритетные направления проектирования. При разработке концепции учитывают все возможные налагаемые на конструкцию ограничения (функциональные, технологические, эксплуатационные, эргономические и др.).

На уровне принятия концепции осуществляется выбор схем, конструкций элементов и основных параметров механизма и машины, наилучшим образом обеспечивающих требуемые выходные характеристики, отвечающие целевому назначению. Здесь целесообразно использовать ЭВМ, используя приложения (CAD/CAM/CAE).

Второй этап заключается в формировании *технического предложения*.

Техническое предложение формулирует принятую концепцию, уточняет и развивает техническое задание. На этом этапе проектирования окончательно выбирают компоновку машины, её узлов и агрегатов при использовании результатов анализа, синтеза и оптимизации вариантов компоновок. Разрабатывают принципиальные схемы машины: кинематическую, гидравлическую, пневматическую, электрическую и др., а также принимают тип и характеристики системы управления. Техническое предложение дает полное представление о компоновке и возможностях проектируемых механизмов и машин.

Третий этап - это *эскизный проект*. Эскизный проект содержит предварительную конструкторскую проработку всех основных узлов и является развитием технического предложения. Он базируется на анализе различных конструкторских решений, результатов расчётов, оптимизации важнейших параметров и характеристик машины. Отметим, что при конструировании следует максимально использовать стандартные и унифицированные детали, механизмы и элементы, что удешевляет проектируемую машину. Каждое конструкторское решение должно быть обосновано результатами расчётов, рассмотрено с точки зрения обеспечения качества и надежности функционирования проектируемой машины, технологичности изготовления и сборки, удобства эксплуатации, ремонтпригодности и т.п.

На четвертом этапе формируют *технический проект*, включающий в себя окончательную конструкторскую проработку всех узловых чертежей, схем машин и её общих видов. На этом этапе производят все виды уточнённых и проверочных расчётов, оптимизируют необходимые параметры узлов и систем машины, окончательно определяют её эффективность. Прогнозируют выходные характеристики и оценивают надежность машины, с учетом вероятностной природы режимов её эксплуатации.

Технический проект должен содержать все исходные данные, необходимые для разработки технической документации на проектируемый механизм или машину, его согласовывают и утверждают в установленном порядке.

Пятый этап - *рабочая документация*. Этот этап включает в себя разработку рабочих чертежей всех оригинальных деталей и простановку технических требований на их изготовление, составление технологической документации, корректировки (в случае необходимости) технического проекта, составление спецификаций оригинальных и покупных комплектующих изделий, формирование паспорта машины, карты технического уровня, инструкции по эксплуатации и ряда других документов. Рабочая документация должна содержать все данные, необходимые для изготовления проектируемого механизма или машины.

После завершения разработки комплекта рабочей документации осуществляется *технологическая подготовка производства* и последующие этапы изготовления и отладки спроектированной машины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов/ Н.С. Пискунов.-4-е изд., доп.-М.: Физматгиз, 1963. - 856 с.: ил.
2. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/ И.М. Воронков.-13-е изд., испр.-М.: Наука, 1966.-596 с.: ил.
3. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1-2: Учеб. пособие/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-М.: Наука., 1968. - 624 с.: ил.
4. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/ С.М. Тарг.-10-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк., 1986. - 415с.: ил.
- 5.Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие.-2-е изд., испр. и доп./ Под ред. К.С. Колесникова.-М.: Наука., 1989. - 448 с.
6. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М.: Наука. 1973. – 256с.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов. – 4-е изд., перераб и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.– мат. лит., 1988. – 640 с.
8. Закабунин В.И. Теория механизмов и машин. Структура и анализ механизмов: Учебное пособие/ Алт. гос. техн. университет им. И.И. Ползунова. – Барнаул: Издательство АлтГТУ, 2004. – 406 с.
9. Кутумов А.А., Сорокина И.А. Структурный анализ механизма: Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2006. - 30 с.
10. Сорокина И.А., Кутумов А.А. Кинематический анализ плоских рычажных и зубчатых механизмов: Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2007. - 42с.
11. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов/ К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.: ил.
12. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/М.М. Гернет.-5-е изд., испр.-М.: Высш.шк., 1987. - 344 с.: ил.
13. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова.-3-е изд., испр.-М.: Высш. шк., 2003.-560 с.: ил.
14. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/Н.М. Беляев. -11-е изд., испр.-М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1958. -856 с.: ил.
15. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро.-3-е изд. испр., - М.: Высш. шк., 1969. -734 с.: ил.
16. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ В.И. Феодосьев. - 2-е изд., испр.- М.: Физматгиз, 1962. -536 с.: ил.
17. Сборник задач по сопротивлению материалов/ Под ред. В.К. Качурина. -М.,1970.- 432с.: ил.
18. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. -Киев.: Наукова думка, 1975.-704 с.
19. Сопротивление материалов: Лаб. практикум: Учеб. пособие/ М. Д.

Подскребко, О. И. Мисуно, С.А. Легенький.-Минск.: Амалфея, 2001.-272 с.

20. Детали машин: Учеб. для вузов/ Д.Н. Решетов. - М.: Высш.шк., 1989.- 469с.

21. Детали машин: Учеб. для вузов/ М.Н. Иванов. - М.: Высш.шк., 1998. - 383 с.

22. Детали машин: Учеб. для вузов/ Г.Б. Иосилевич. - М.: Высш.шк., 1989. - 368 с.

23. Детали машин: Учеб. для вузов/ П.Г. Гузенков. - М.: Высш.шк., 1982. - 351 с.

24. Курсовое проектирование деталей машин: Учеб. пособие. -/ Под ред. В.Н. Кудрявцева. - Л., 1984. - 395 с.

25. Детали машин: Учеб. для вузов/ Н.Г. Куклин, Г.С. Куклина. - М.: 1979. - 309 с.

26. Сб. задач и примеров расчёта по курсу деталей машин/ Г.М. Ицкевич, С.А. Чернавский, В.А. Киселёв и др. - М., 1975. - 284с.

27. Допуски и посадки: Учеб. пособие/ И.М. Белкин. - М., 1992.

28. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения: Учеб. пособие/ А.И. Якушев, Л.Н. Воронцов, Н.М. Федоров. - М., 1986.

29. Сборник примеров и задач по курсу «Основы стандартизации, допуски, посадки и технические измерения»/ Н.С. Козловский, В.М. Ключников. - М.,1983.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Международная система единиц (СИ)

Таблица П 1

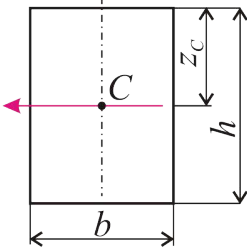
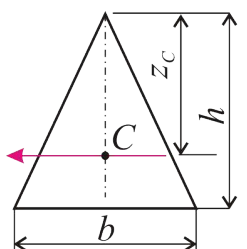
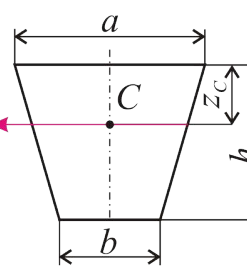
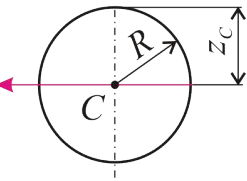
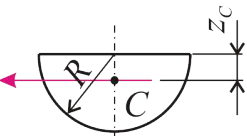
Выписка из таблиц Международной системы единиц (СИ)

Наименование величины	Единица измерения	Сокращённое обозначение единицы	
		русское	латинское или греческое
Основные единицы			
Длина	Метр	<i>м</i>	<i>m</i>
Масса	Килограмм	<i>кг</i>	<i>kg</i>
Время	Секунда	<i>сек</i>	<i>s</i>
Сила электрического тока	Ампер	<i>а</i>	<i>A</i>
Дополнительные единицы			
Плоский угол	Радян	<i>рад</i>	<i>rad</i>
Телесный угол	Стерadian	<i>стер</i>	<i>sr</i>
Производные единицы			
Площадь	Квадратный метр	<i>м²</i>	<i>m²</i>
Объём	Кубический метр	<i>м³</i>	<i>m³</i>
Частота	Герц (1/сек)	<i>гц</i>	<i>Hz</i>
Объёмная масса (плотность)	Килограмм на кубический метр	<i>кг/м³</i>	<i>kg/m³</i>
Скорость	Метр в секунду	<i>м/сек</i>	<i>m/s</i>
Угловая скорость	Радян в секунду	<i>рад/сек</i>	<i>rad/s</i>
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	<i>м/сек²</i>	<i>m/s²</i>
Угловое ускорение	Радян на секунду в квадрате	<i>рад/сек²</i>	<i>rad/s²</i>
Сила	Ньютон (<i>кг·м/сек²</i>)	<i>н</i>	<i>N</i>
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на квадратный метр	<i>н/м²</i>	<i>N/m²</i>
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на кв. метр	<i>н·сек/м²</i>	<i>Ns/m²</i>
Кинематическая вязкость	Кв. метр в секунду	<i>м²/сек</i>	<i>m²/s</i>
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль (<i>н·м</i>)	<i>дж</i>	<i>J</i>
Мощность	Ватт (<i>дж/сек</i>)	<i>вт</i>	<i>W</i>
Количество электричества	Кулон (<i>а·сек</i>)	<i>к</i>	<i>C</i>
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт (<i>вт/а</i>)	<i>в</i>	<i>V</i>
Напряжённость электрического поля	Вольт на метр	<i>в/м</i>	<i>V/m</i>
Электрическое сопротивление	Ом (<i>в/м</i>)	<i>ом</i>	Ω
Электрическая ёмкость	Фарада (<i>к/в</i>)	<i>ф</i>	<i>F</i>
Поток магнитной индукции	Вебер (<i>к/ом</i>)	<i>вб</i>	<i>Wb</i>
Индуктивность	Генри (<i>вб/а</i>)	<i>гн</i>	<i>H</i>
Магнитная индукция	Тесла (<i>вб/м²</i>)	<i>тл</i>	<i>T</i>
Напряжённость магнитного поля	Ампер на метр	<i>а/м</i>	<i>A/m</i>

2. Геометрические характеристики простейших плоских сечений

Таблица П 2

Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

Сечение	$J_C, м^4$	$z_C, м$	$A, м^2$
<p>Прямоугольник</p> 	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{2} h$	$b h$
<p>Треугольник</p> 	$\frac{1}{36} b h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{2} b h$
<p>Трапеция равнобедренная</p> 	$\frac{1}{36} h^3 \times \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}$	$\frac{1}{3} h \times \frac{a+2b}{a+b}$	$\frac{1}{2} h \times (a+b)$
<p>Круг</p> 	$\frac{1}{4} \pi R^4$	R	πR^2
<p>Полукруг</p> 	$\frac{9 \pi^2 - 64}{72 \pi} R^4$	$\frac{4 R}{3 \pi}$	$\frac{1}{2} \pi R^2$

3. Некоторые сведения о шпоночных соединениях

Шпонки призматические (ГОСТ 23369-78)

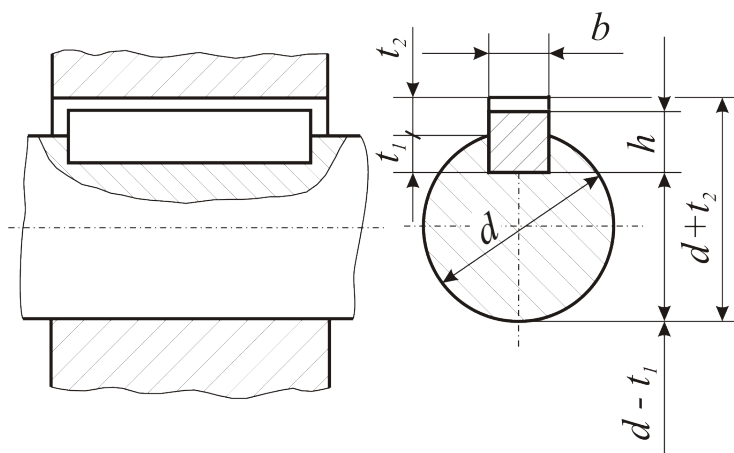


Таблица П 3

Шпонки призматические (по ГОСТ 23360-70, с сокращениями), размеры в мм

Диаметр вала, d	Сечение шпонки, $b \times h$	Глубина паза		Фаска $s \times 45^\circ$
		вала t_1	втулки t_2	
Св. 10 до 12	44	2,5	1,8	0,08...0,16
» 12 » 17	5×5	3,0	2,3	0,16...0,25
» 17 » 22	6×6	3,5	2,8	
» 22 » 30	8×7	4,0	3,3	
» 30 » 38	10×8	5,0	3,3	0,25...0,40
» 38 » 44	12×8	5,0	3,3	
» 44 » 50	14×9	5,5	3,8	
» 50 » 58	16×10	6,0	4,3	
» 58 » 65	18×11	7,0	4,4	
» 65 » 75	20×12	7,5	4,9	0,40...0,60
» 75 » 85	22×14	9,0	5,4	
» 85 » 95	25×14	9,0	5,4	
» 95 » 110	28×16	10,0	6,4	

Примечания:

1. Длину шпонки выбирают из ряда: 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200...(до 500).

2. Материал шпонок - сталь чистотянутая с временным сопротивлением разрыву не менее 590 МПа.

3. Примеры условного обозначения шпонок:

исполнение 1, сечение $b \times h = 20 \times 12$, длина 90 мм:

Шпонка 20×12×90 ГОСТ 23360-78

то же, исполнение 2:

Шпонка 2 - 20×12×90 ГОСТ 23360-78

4. Некоторые сведения о подшипниках качения

Шарикоподшипники радиальные однорядные (ГОСТ 8338-75)

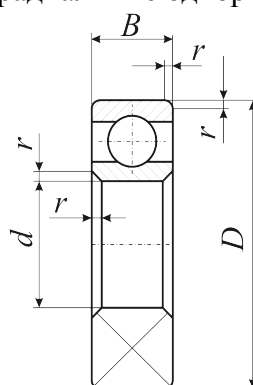


Таблица П 4

Шарикоподшипники радиальные однорядные (ГОСТ 8338-75), размеры в мм

Условное обозначение	d	D	B	r	Грузоподъёмность, кН		
					Динамическая C	Статическая C_0	
217	-	85	150	28	3	89,5	56,5
218	80218	90	160	30	3	95,6	62,0
219	-	95	170	32	3,5	108,0	69,5
219A	-	95	170	32	3,5	115,0	74,0
220	80220	100	180	34	3,5	124,0	79,0
Средняя серия							
300	10	35	11	1	1	8,06	3,75
301	12	37	12	1,5	1,5	9,75	4,65
302	15	42	13	1,5	1,5	11,4	5,4
303	17	47	14	1,5	1,5	13,5	6,65
304	20	52	15	2	2	15,9	7,8
305	25	62	17	2	2	22,5	11,4
306	30	72	19	2	2	28,1	14,6
307	35	80	21	2,5	2,5	33,2	18,0
308	40	90	23	2,5	2,5	41,0	22,4
309	45	100	25	2,5	2,5	52,7	30,0
310	50	110	27	3	3	65,8	36,0
311	55	120	29	3	3	71,5	41,5
312	60	130	31	3,5	3,5	81,9	48,0
313	65	140	33	3,5	3,5	92,3	56,0
314	70	150	35	3,5	3,5	104,0	63,0
315	75	160	37	3,5	3,5	112,0	72,5
316	80	170	39	3,5	3,5	124,0	80,0
316K5	80	170	39	3,5	3,5	130,0	89,0
317	85	180	41	4	4	133,0	90,0
318	90	190	43	4	4	143,0	99,0
319	95	200	45	4	4	153,0	110
319K5	95	200	45	4	4	161,0	120,0
320	100	215	47	4	4	174,0	132,0
Тяжёлая серия							
403	17	62	17	2	2	22,9	11,8
405	25	80	21	2,5	2,5	36,4	20,4
406	30	90	23	2,5	2,5	47,0	26,7
407	35	100	25	2,5	2,5	55,3	31,6
408	40	110	27	3	3	63,7	36,5
409	45	120	29	3	3	76,1	45,5
410	50	130	31	3,5	3,5	87,1	52,0
411	55	140	33	3,5	3,5	100,0	63,0
412	60	150	35	3,5	3,5	108,0	70,0

5. Краткие данные по компоновке основных типов зубчатых редукторов

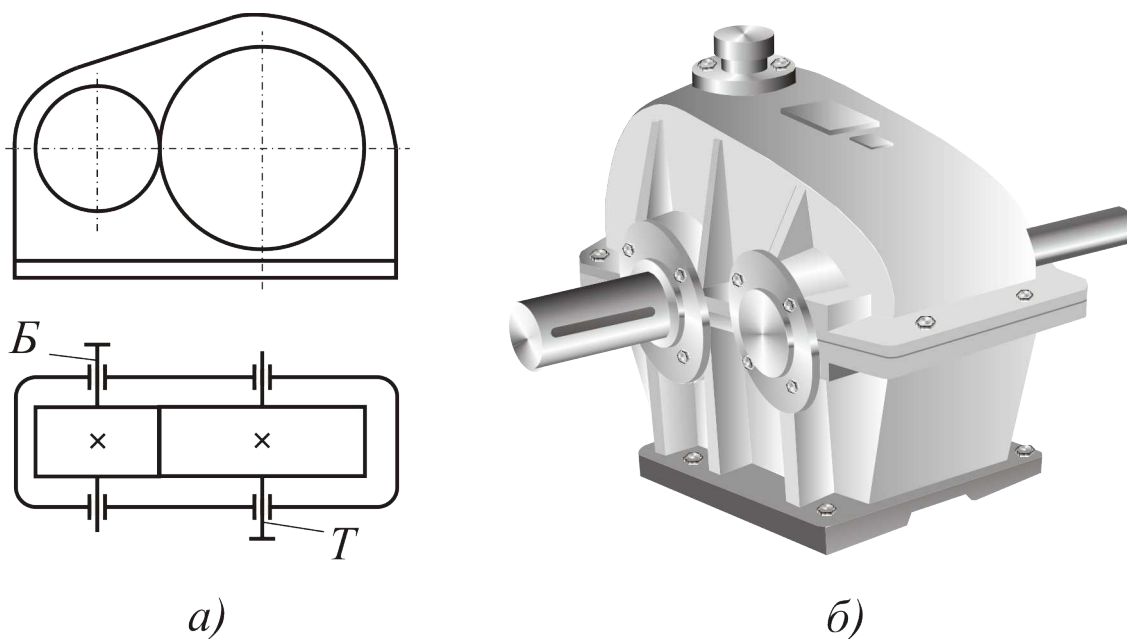


Рис. П1. Одноступенчатый горизонтальный редуктор с цилиндрическими зубчатыми колёсами: а) кинематическая схема; б) общий вид

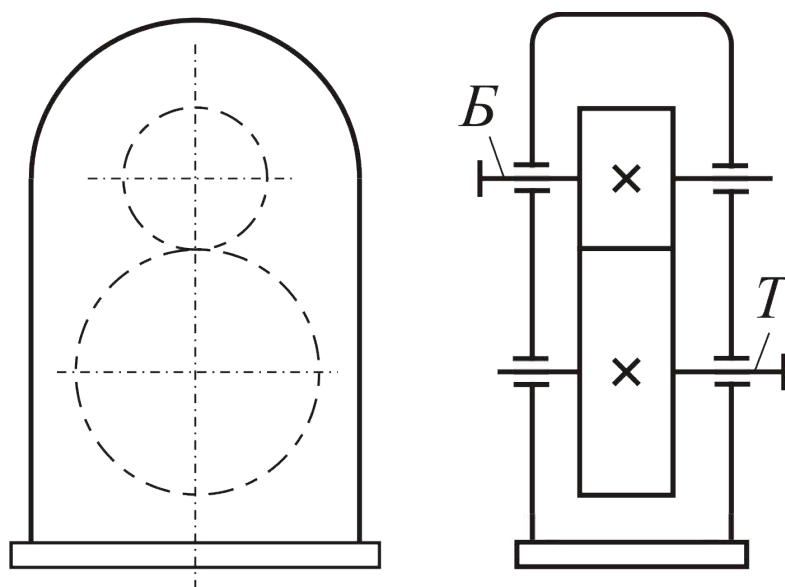


Рис. П2. Кинематическая схема одноступенчатого вертикального редуктора с цилиндрическими колёсами

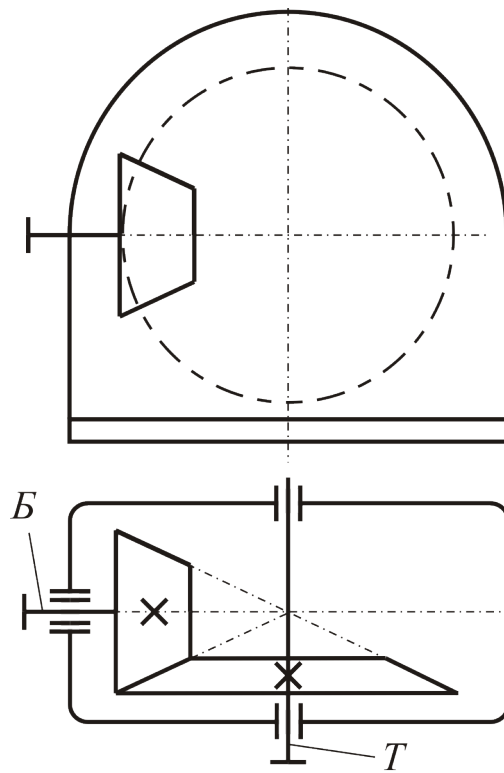


Рис. ПЗ. Кинематическая схема одноступенчатого редуктора с коническими зубчатыми колёсами

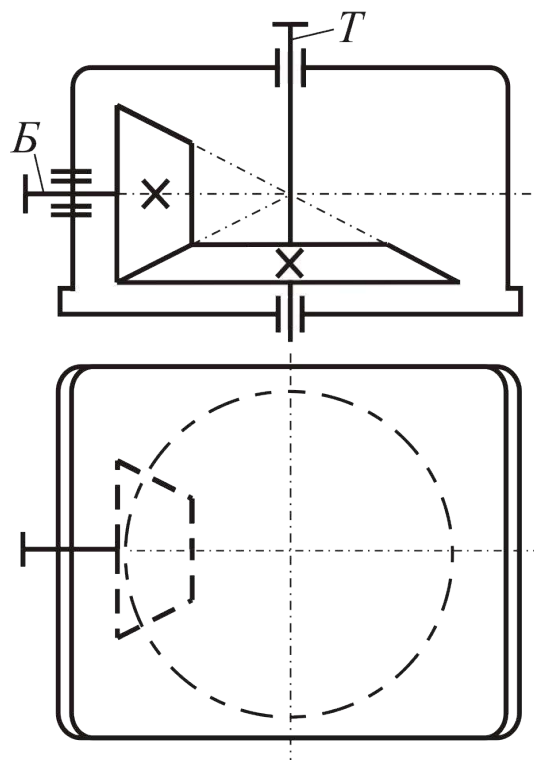


Рис. П4. Кинематическая схема одноступенчатого конического редуктора с вертикальным ведомым валом

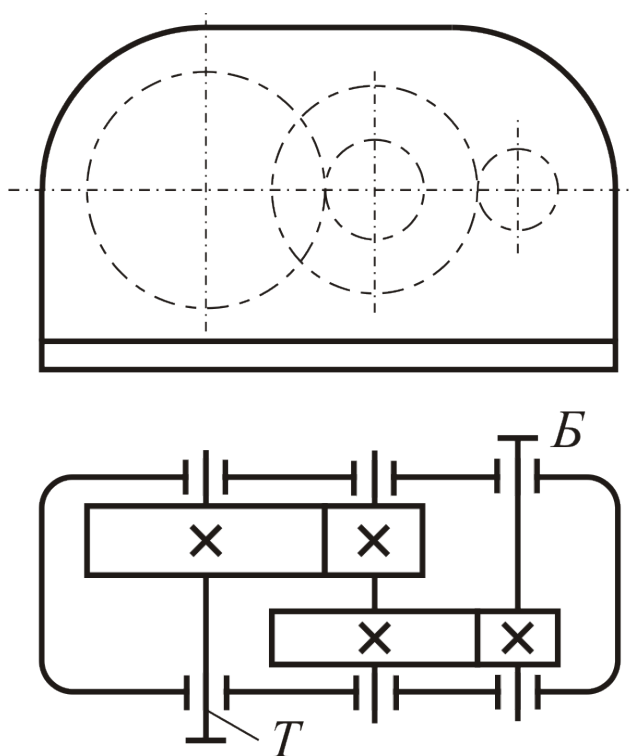


Рис. П5. Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального редуктора с цилиндрическими колесами

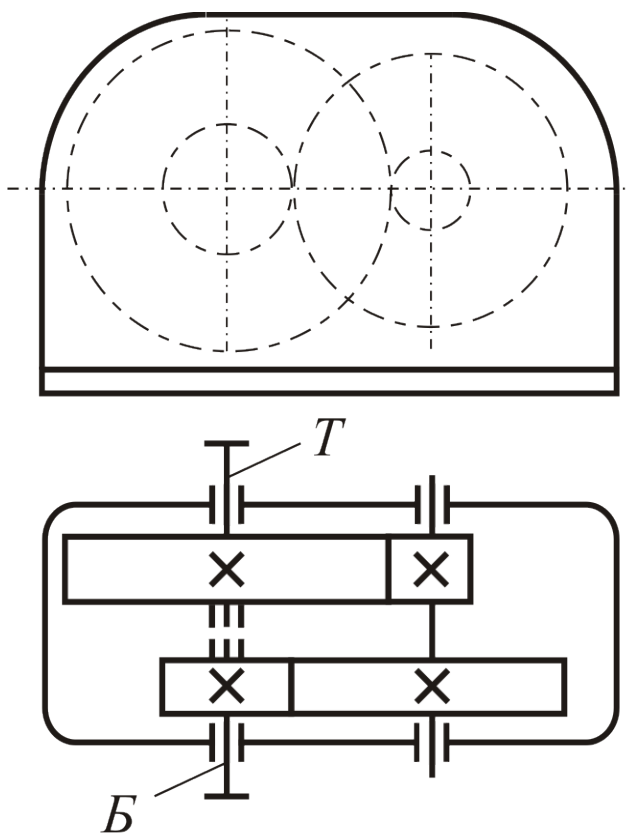


Рис. П6. Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального соосного редуктора

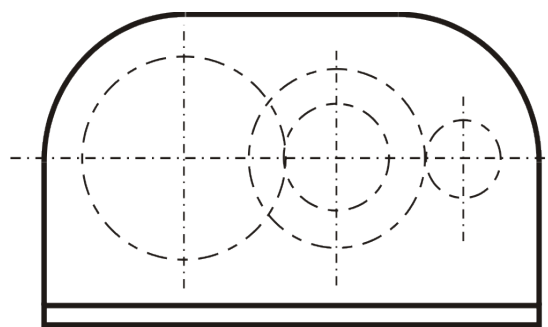


Рис. П7. Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального редуктора с раздвоенной первой (быстроходной) ступенью

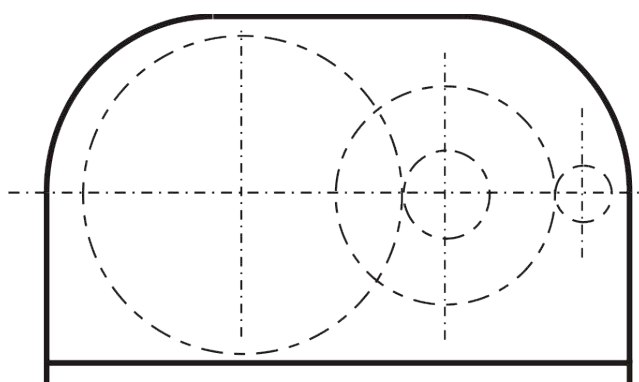


Рис. П8. Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального редуктора с раздвоенной второй (тихоходной) ступенью

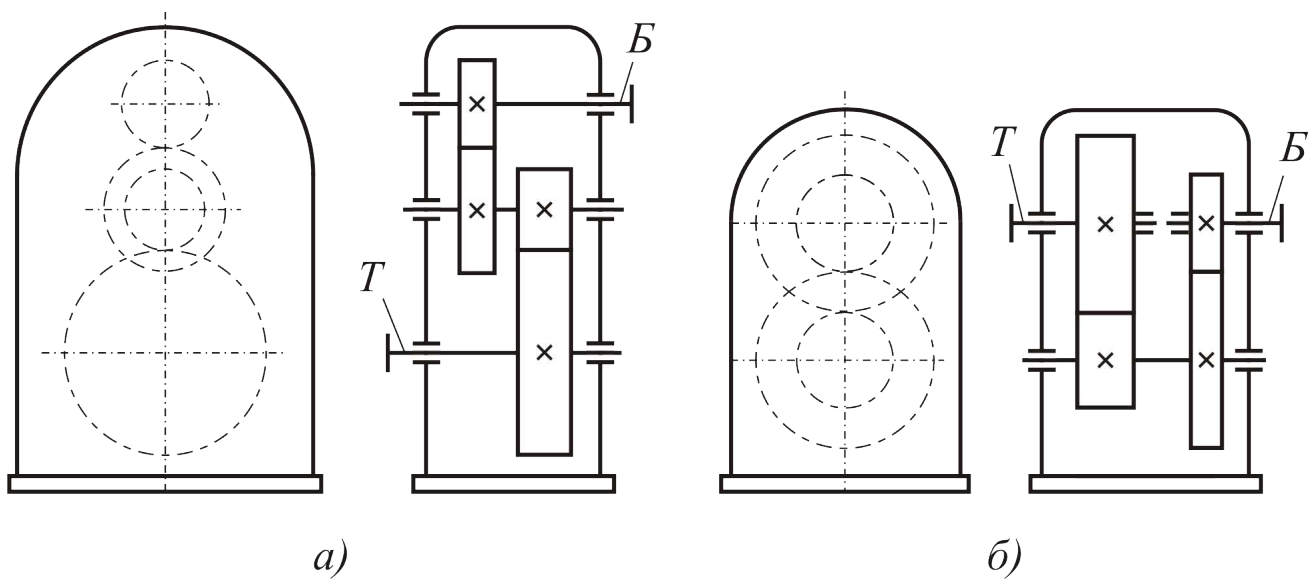


Рис. П9. Кинематические схемы двухступенчатых цилиндрических вертикальных редукторов: а) развёрнутая схема; б) соосная схема

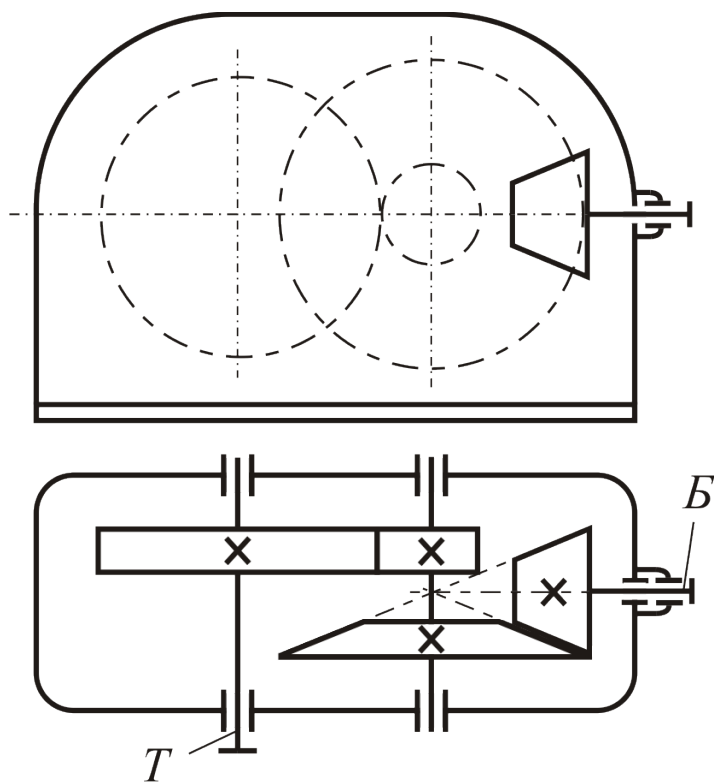


Рис. П10. Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального коническо-цилиндрического редуктора

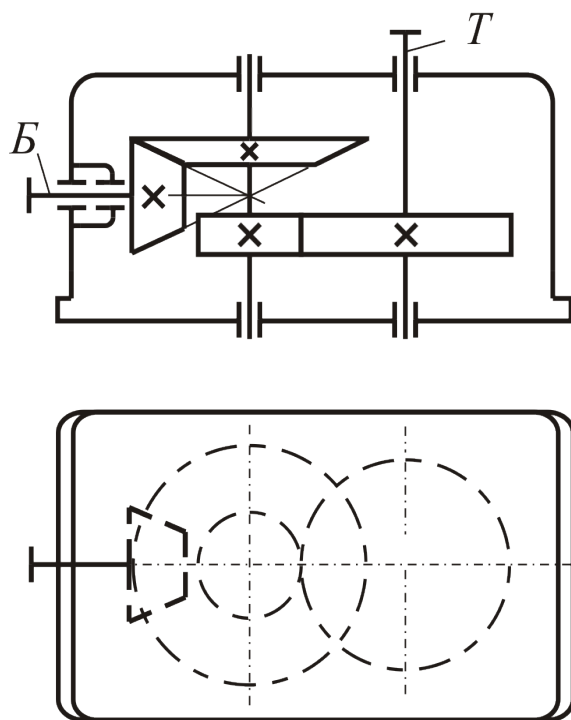


Рис. П11. Кинематическая схема двухступенчатого коническо-цилиндрического редуктора с вертикальным тихоходным валом

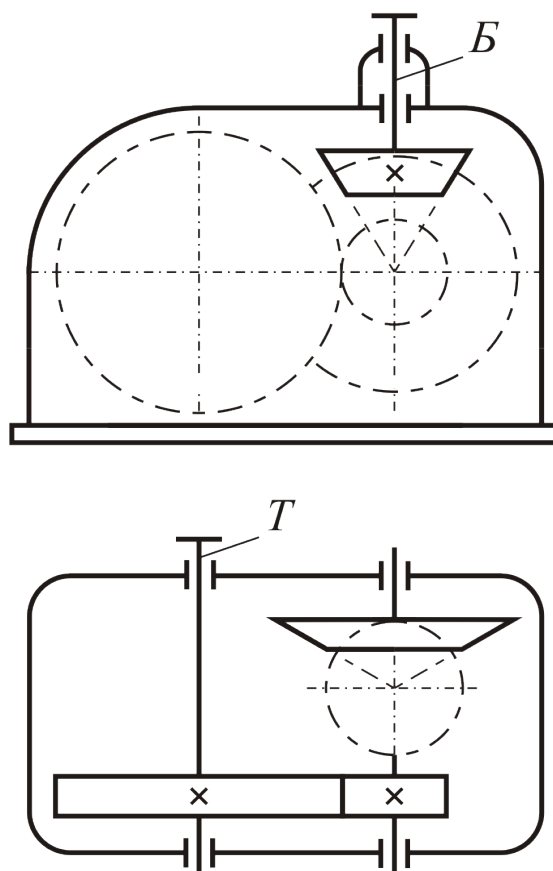


Рис. П12. Кинематическая схема двухступенчатого коническо-цилиндрического редуктора с вертикальным быстроходным валом

Демидов Александр Станиславович
Кутумов Алексей Анатольевич

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И КОНСТРУИРОВАНИЯ

Учебное пособие для подготовки бакалавров заочной и заочной сокращенной форм обучения направлений 151900 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 151700 «Машиностроение», 151000 «Технологические машины и оборудование», 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано в печать 22.06.12. Формат 60X84 1/16
Усл. печ. л. 18,18. Тираж 65 экз. Зак. 121085. Рег №170

Отпечатано в типографии ООО Фирма «Выбор»
658213, Рубцовск, Ленина, 41